

Session Février 2015

Module	Séries temporelles
Auditoire	2^{ième} Année Mastère Ingénierie financière
Enseignant	Mohamed Essaied Hamrita
Durée	Deux heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la clarté entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Aucun document n'est autorisé.

NB : Toutes les questions sont indépendantes.

1) Soient $\{X_t\}$ et $\{Y_t\}$ deux processus stationnaires de moyennes nulles et indépendants. Le processus $\{X_t\}$ possède une fonction d'auto-covariance définie par : $\gamma_X(k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$ et $\{Y_t\} \sim BB(0, \sigma_Y^2)$. On définit $\{Z_t\}$ comme suit :

$$Z_t = X_t(Y_t + Y_{t-1}) \quad \text{pour tout } t.$$

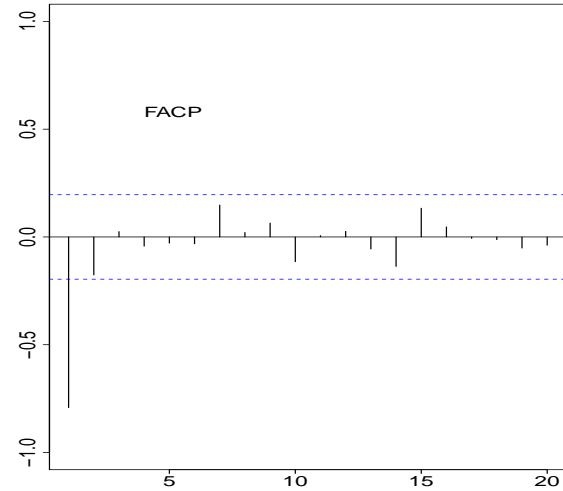
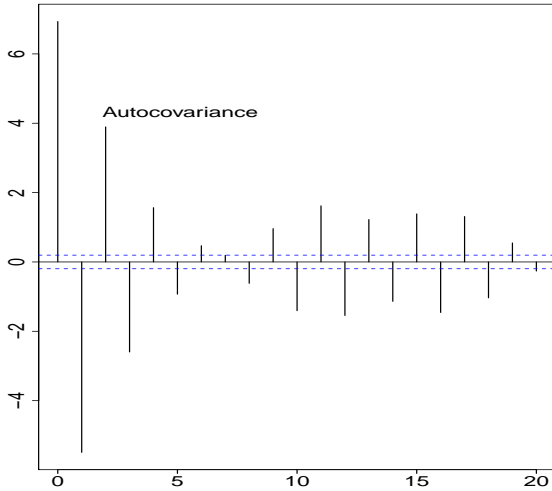
Montrer que $\{Z_t\}$ est un processus $MA(1)$, et déterminer les paramètres de la version inversible.

2) On considère le modèle suivant : $X_t = -2t + \epsilon_t + 0.5\epsilon_{t-1}$, $\epsilon_t \sim BB(0, \sigma^2)$.

a) Déterminer l'espérance et la fonction d'auto-covariance de ce modèle. Ce modèle est-il stationnaire ?

b) Soit le processus Y_t défini par : $Y_t = \nabla X_t = X_t - X_{t-1}$. Déterminer l'espérance et la fonction d'auto-covariance de ce processus. Ce processus est-il stationnaire ?

3) Soit x_1, x_2, \dots, x_T une réalisation d'un processus stationnaire. On donne la représentation des auto-covariances empiriques et les auto-corrélations partielles empiriques.



a) On veut modéliser cette série. Quelle modèle vous proposez pour cette série (un $AR(p)$ ou un $MA(q)$)? Quel est son ordre? Justifier.

b) Quelle est la valeur de $V(X_t)$?

4) On considère le modèle $ARMA$ suivant : $X_t = X_{t-1} - 0.25X_{t-2} + Z_t - 0.25Z_{t-1}$, $Z_t \sim N(0, 1)$.

a) Ce modèle est-il causal? Inversible

b) Donner l'écriture $MA(\infty)$ de ce modèle.

c) Donner son écriture $AR(\infty)$.

5) On donne les valeurs suivantes provenant d'un processus $AR(1)$:

$$-1.1 \quad 2.6 \quad 4.3 \quad -1.1 \quad 9.7 \quad 4.1 \quad -0.6 \quad 2.2$$

a) Déterminer le coefficient d'auto-corrélation partiel empirique, $\hat{\phi}_{11}$, à partir des données ci-dessus.

b) Si on vous dit que $\phi = 0.85$, que vaut ϕ_{22} (valeur théorique)? Justifier votre réponse.

6) Soit une série temporelle $X = (x_1, x_2, \dots, x_{100})$.

a) Écrire la commande R permettant de calculer $Y = \nabla X = X_t - X_{t-1}$.

b) Écrire les commandes R permettant de tracer les auto-corrélations (empiriques) et les auto-corrélations partielles (empiriques) de Y .

c) On suppose que le processus Y est un $ARMA(1, 2)$. Donner la commande R qui permet d'estimer les paramètres de Y .