

Processus linéaires stationnaires

Ce chapitre a pour objectif principal de donner les caractéristiques statistiques des modèles linéaires. En particulier, on étudiera les conditions de stationnarité et d'inversibilité, le comportement des auto-corrélations ainsi que les auto-corrélations partielles des processus ARMA (Auto-Regressive Moving Average).

2.1 Processus linéaire générale

Un processus X_t est dit linéaire s'il admet une représentation de Wold, c'est à dire, il peut être écrit sous la forme :

$$X_t - \mu = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \epsilon_{t-j} = \Psi(L)\epsilon_t \quad (2.1.1)$$

où μ est la moyenne du processus et $\Psi(L) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} L^j$.

D'une façon similaire, le processus (2.1.1) peut être écrit comme suit :

$$\left(1 - \sum_{j=1}^{\infty} L^j \pi_j\right) (X_t - \mu) = \Pi(L)(X_t - \mu) = \epsilon_t \quad (2.1.2)$$

où $\Pi(L) = \Psi(L)^{-1}$.

(Box, Jenkins et Reinsel, 2008) ont montrés que la fonction d'auto-covariance du processus (2.1.1) est donnée par :

$$\gamma(k) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j+1} \quad (2.1.3)$$

En particulier, lorsque $k = 0$, on trouve que la variance du processus est :

$$\gamma(0) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 \quad (2.1.4)$$

Il s'en suit que la condition $\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$ implique que la partie droite de (2.1.4) converge, et donc, garantie l'existence d'une variance finie pour le processus (2.1.1). Pour que ce

processus soit stationnaire, les fonctions d'auto-covariance et d'auto-corrélations doivent remplir certaines conditions. Ces conditions sont vérifiées à partir de la relation $\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$. Cette condition peut être remplacé par le fait que la série $\Psi(L)$ ne converge que lorsque $|L| \leq 1$, c'est à dire que le polynôme $\Psi(L)$ admet des racines à l'extérieur du cercle unité (Box et collab., 2008).

Maintenant, recherchons une restriction appliquée sur les coefficients π_j pour assurer ce qu'on appelle condition d'**inversibilité**. La condition d'inversibilité est indépendante de la stationnarité et applicable pour les processus non stationnaire.

En général, un processus linéaire est inversible si $\sum_{j=0}^{\infty} |\pi_j| < \infty$, ce qui implique que le polynôme $\Pi(L)$ admet des racines à l'extérieur du cercle unité.

2.2 Fonction d'auto-corrélation

Soit $\{X_t\}$ une série temporelle stationnaire. La covariance $\gamma(k) = \text{cov}(X_t, X_{t-k})$ est appelée auto-covariance d'ordre (ou de décalage) k .

Définition 2.1 (Fonction d'auto-covariance). *La fonction $k \rightarrow \gamma(k)$; $k \in \mathbb{Z}$ est appelée fonction d'auto-covariance de $\{X_t\}$.*

Cette fonction vérifie les propriétés suivantes :

Propriétés 2.1. *i) $\gamma(0) = V(X_t)$.*

ii) $|\gamma(k)| \leq \gamma(0)$, $\forall k$.

iii) $\gamma(k) = \gamma(-k)$, $\forall k$.

Cette fonction étant paire, on ne la représente que pour $k = 0, 1, 2, \dots$

Définition 2.2 (Coefficient d'auto-corrélation). *Le coefficient d'auto-corrélation d'ordre k est :*

$$\rho(k) = \frac{\text{cov}(X_t, X_{t-k})}{V(X_t)} = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)}$$

Définition 2.3 (Fonction d'auto-corrélation). *La fonction $k \rightarrow \rho(k)$; $k \in \mathbb{Z}$ est appelée fonction d'auto-corrélation (théorique) de $\{X_t\}$.*

Définition 2.4 (Coefficient d'auto-corrélation partiel). *Le coefficient de corrélation partielle ϕ_{kk} entre les deux variables X_1 et X_k d'un processus stochastique $(X_t)_t$ est le coefficient de corrélation entre les deux variables auxquelles on a retranché les observations X_2, \dots, X_{k-1} .*

On utilisera l'abréviation anglaise (ACF) pour la fonction d'auto-corrélation et (PACF) pour la fonction d'auto-corrélation partielle qui sont utilisées par le logiciel R. On appelle ses graphiques corrélogramme et corrélogramme partiel respectivement. On voit que : $\rho(0) = 1$ et $-1 \leq \rho(k) \leq 1$.

Dans la pratique, on estime les fonctions d'auto-covariance, d'auto-corrélation et d'auto-corrélation partielle par les quantités suivantes :

Fonction d'auto-covariance empirique :

$$\hat{\gamma}(k) = \frac{\sum_{t=1}^{T-|k|} (X_t - \bar{X})(X_{t-|k|} - \bar{X})}{T}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Cet estimateur est un estimateur **biaisé** de $\gamma(k)$, mais, sous certaines conditions, on peut montrer qu'il est asymptotiquement **sans biais**. Si X_t est un processus stationnaire gaussien et si la série de terme général $\gamma(k)$ est absolument convergente, alors $\hat{\gamma}(k)$ converge en moyenne quadratique vers $\gamma(k)$.

Le coefficient d'auto-corrélation empirique :

$$\hat{\rho}(k) = \frac{\sum_{t=1}^{T-|k|} (X_t - \bar{X})(X_{t-|k|} - \bar{X})}{(X_t - \bar{X})^2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Le coefficient d'auto-corrélation partiel empirique : est estimé comme suit :

$$\phi_{kk} = \frac{|\mathcal{R}^*(k)|}{|\mathcal{R}(k)|} \quad (2.2.1)$$

où $\mathcal{R}(h)$ est la matrice des auto-corrélations à l'ordre $k - 1$ définie par :

$$\mathcal{R}(k) = \begin{pmatrix} \rho(0) & \rho(1) & \dots & \rho(k-1) \\ \rho(1) & \rho(0) & \dots & \rho(k-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho(k-1) & \rho(k-2) & \dots & \rho(0) \end{pmatrix}$$

et $\mathcal{R}^*(k)$ est la matrice obtenue après le remplacement de la dernière colonne de $\mathcal{R}(k)$ par $(\rho(1), \rho(2), \dots, \rho(k))^t$. On peut aussi utiliser la forme recursive de l'algorithme de Durbin pour estimer le coefficient d'auto-corrélation partiel :

$$\phi_{k+1,j} = \phi_{k,j} - \phi_{k+1,k+1}\phi_{k,k-j+1}, \quad j = 1, 2, \dots, k; \quad (2.2.2)$$

$$\phi_{k+1,k+1} = \frac{\rho(k+1) - \sum_{j=1}^k \phi_{k,j}\rho(k-j+1)}{1 - \sum_{j=1}^k \phi_{k,j}\rho(j)} \quad (2.2.3)$$

Pour les détails de cet algorithme, vous pouvez consulter (Box et collab., 2008, section A3.2).

2.3 Processus ARMA

La classe des modèles ARMA peut être décomposée en deux sous classes : la classe des modèles autorégressives *AR* et la classe des modèles moyenne mobile *MA*.

2.3.1 Processus MA

Processus MA d'ordre 1

Soit $\{\epsilon_t\}$ un *BB* et on considère le processus $\{X_t\}$ défini par :

$$X_t = \mu + \epsilon_t + \theta\epsilon_{t-1}, \quad (2.3.1)$$

où μ et θ sont des constantes réelles. Ce processus est dit processus moyenne mobile d'ordre 1 et noté par *MA*(1) (on note $X_t \sim MA(1)$). Le terme "*moyenne mobile*" vient du fait que X_t est construit à partir de la somme pondérée des deux dernières observations de la variables aléatoire ϵ_t .

Ce processus est toujours (pour toutes valeurs de θ) stationnaire, mais il n'est inversible que lorsque $-1 < \theta < 1$ (Box et collab., 2008, section 3.1.3). L'espérance du processus X_t est donnée par :

$$E(X_t) = E(\mu + \epsilon_t + \theta\epsilon_{t-1}) = \mu + E(\epsilon_t) + \theta E(\epsilon_{t-1}) = \mu \quad (2.3.2)$$

La variance de X_t est :

$$\begin{aligned} V(X_t) &= E(X_t - \mu)^2 = E(\epsilon_t + \theta\epsilon_{t-1})^2 \\ &= E(\epsilon_t^2) + 2\theta E(\epsilon_t\epsilon_{t-1}) + \theta^2 E(\epsilon_{t-1}^2) \\ &= \sigma^2 + 0 + \theta^2\sigma^2 = (1 + \theta^2)\sigma^2. \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

La première auto-covariance est :

$$\begin{aligned} \gamma(1) &= E(X_t - \mu)(X_{t-1} - \mu) \\ &= E(\epsilon_t + \theta\epsilon_{t-1})(\epsilon_{t-1} + \theta\epsilon_{t-2}) \\ &= E(\epsilon_t\epsilon_{t-1}) + \theta E(\epsilon_t\epsilon_{t-2}) + \theta E(\epsilon_{t-1}^2) + \theta^2 E(\epsilon_{t-1}\epsilon_{t-2}) \\ &= 0 + 0 + \theta\sigma^2 + 0 = \theta\sigma^2. \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

L'auto-covariance pour $k > 1$ est nulle :

$$E(X_t - \mu)(X_{t-k}) = E(\epsilon_t + \theta\epsilon_{t-1})(\epsilon_{t-k} + \theta\epsilon_{t-k-1}) = 0 \quad \text{pour } k > 1. \quad (2.3.5)$$

Puisque la moyenne et la fonction d'auto-covariance du processus *MA*(1) sont indépendantes du temps, alors ce processus est stationnaire pour toute valeur de θ .

A partir de (2.3.3) et (2.3.4), on déduit la première auto-corrélation :

$$\rho(1) = \frac{\gamma(1)}{\gamma(0)} = \frac{\theta\sigma^2}{(1+\theta^2)\sigma^2} = \frac{\theta}{1+\theta^2} \quad (2.3.6)$$

et toutes les autres auto-corrélations sont nulles.

La fonction d'auto-corrélation (ACF) peut être représentée graphiquement en fonction du k . Le graphique (2.1) donne la ACF théorique pour $\theta = 0.8$ (à gauche) et $\theta = -0.35$ (à droite).

```
par(mfrow=c(1,2))
ma8<-ARMAacf(ma=0.8,lag.max=10)
ma35<-ARMAacf(ma=-0.35, lag.max=10)
plot(0:10,ma8,type="h",ylim=c(0,1.5),ylab="",xlab="",

      main=expression(italic(displaystyle(theta==0.8))))
points(0:10,ma8,pch=16)
abline(h=0)
plot(0:10,ma35,type="h",ylim=c(-1,1.5),ylab="",xlab="",

      main=expression(italic(displaystyle(theta== -0.35))))
points(0:10,ma35,pch=16)
abline(h=0)
```

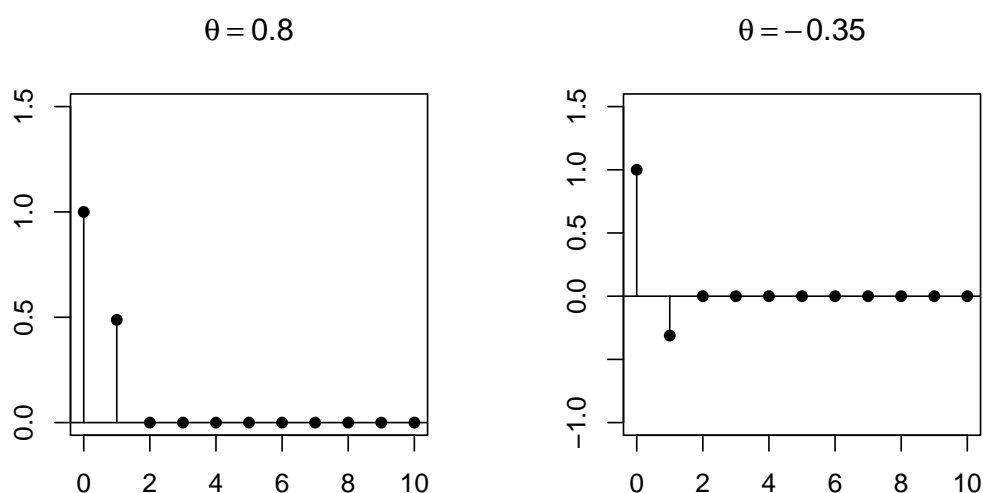


FIGURE 2.1 – ACF théorique d'un MA(1).

Le comportement du $\rho(1)$ en fonction de θ est représenté dans la figure (2.2). On note que la valeur la plus large du $\rho(1)$ est 0.5 ; celle-ci est obtenue lorsque $\theta = 1$. La valeur la plus faible du $\rho(1) = -0.5$ est obtenue pour $\theta = -1$. Pour toute valeur du $\rho(1)$ entre -0.5 et 0.5, on a deux valeurs possibles de θ qui peuvent produire cette auto-corrélation. Ceci se justifie par le fait que la valeur de $\theta/(\theta^2 + 1)$ reste inchangée si θ est remplacée par $1/\theta$, en effet :

$$\rho(1) = \frac{1/\theta}{1/\theta^2 + 1} = \frac{\theta^2(1/\theta)}{1 + \theta^2} = \frac{\theta}{\theta^2 + 1}.$$

Par exemple, les processus $X_t = \epsilon_t + 0.5\epsilon_{t-1}$ et $X_t = \epsilon_t + 2\epsilon_{t-1}$ ont la même fonction d'auto-corrélation :

$$\rho(1) = \frac{0.5}{0.5^2 + 1} = \frac{2}{2^2 + 1} = 0.4.$$

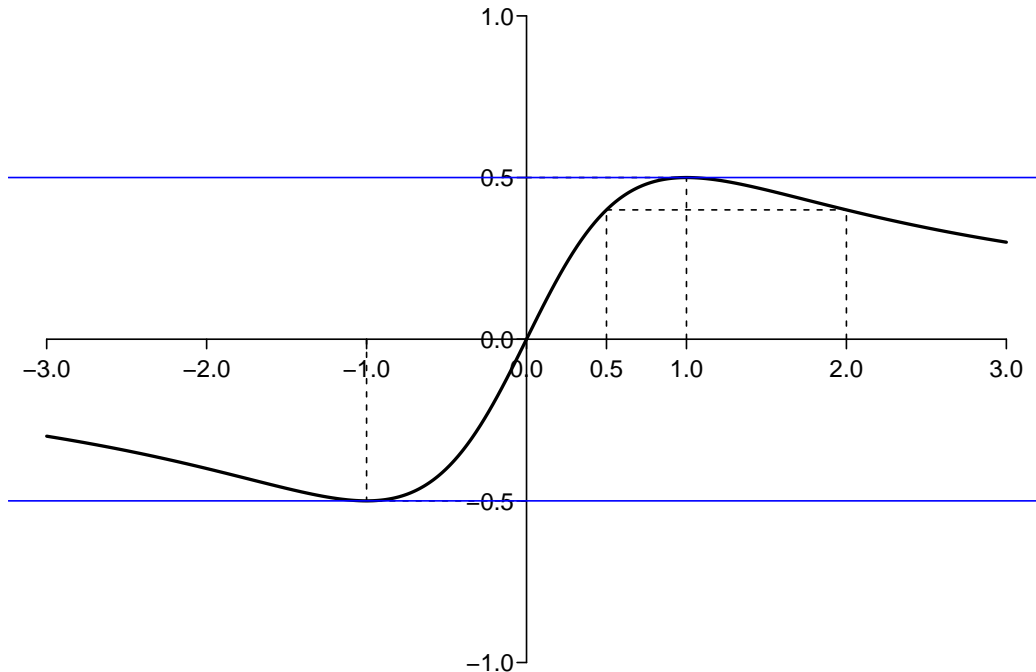


FIGURE 2.2 – Le comportement de $\rho(1)$ du processus MA(1) en fonction de θ .

Pour plus d'information concernant les liaisons qui peuvent exister entre deux processus MA(1), vous pouvez voir (Hamilton, 1994, Section 3.7).

La fonction d'auto-corrélation partielle : En utilisant la relation (2.2.1) avec $\rho(1) = \theta/(1 + \theta^2)$ et $\rho(k) = 0 \forall k > 0$, on peut montrer que les auto-corrélations partielles peuvent être obtenues à partir de cette relation :

$$\phi_{kk} = -(-\theta)^k / (1 + \theta^2 + \theta^4 + \dots + \theta^{2k}) \quad (2.3.7)$$

Exemple 2.1 : PACF du processus $x_t = \epsilon_t + 0.8\epsilon_{t-1}$

Cherchons les trois premières auto-corrélations partielles du processus suivant :

$$x_t = \epsilon_t + 0.8\epsilon_{t-1} \text{ où } \epsilon_t \sim BB(0, 1)$$

La détermination de ces coefficients se fait soit en utilisant la relation (2.2.1), soit en utilisant la relation (2.3.7).

On sait que la ACF du processus $MA(1)$ est définie par :

$$\rho(k) = \begin{cases} 1, & \text{si } k = 0; \\ \frac{\theta}{1+\theta^2} = 0.4878, & \text{si } k = 1; \\ 0, & \text{si } k > 1. \end{cases}$$

Donc, $\phi_{11} = \rho(1) = 0.4878$,

$$\phi_{22} = \frac{\mathcal{R}^*(2)}{\mathcal{R}(2)} = \frac{\begin{vmatrix} \rho(0) & \rho(1) \\ \rho(1) & \rho(2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \rho(0) & \rho(1) \\ \rho(1) & \rho(0) \end{vmatrix}} = \frac{\rho(0)\rho(2) - \rho^2(1)}{\rho^2(0) - \rho^2(1)} = -0.3122$$

$$\text{et } \phi_{33} = \frac{\mathcal{R}^*(3)}{\mathcal{R}(3)} = \frac{\begin{vmatrix} \rho(0) & \rho(1) & \rho(1) \\ \rho(1) & \rho(0) & \rho(2) \\ \rho(2) & \rho(1) & \rho(3) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \rho(0) & \rho(1) & \rho(2) \\ \rho(1) & \rho(0) & \rho(1) \\ \rho(2) & \rho(1) & \rho(0) \end{vmatrix}} = 0.22147$$

On peut vérifier que la relation (2.3.7) donne le même résultat :

$$\phi_{11} = -(-\theta)/(1+\theta^2) = -(-0.8)/(1+0.8^2) = 0.4878.$$

$$\phi_{22} = -(-\theta)^2/(1+\theta^2+\theta^4) = -(-0.8)^2/(1+0.8^2+0.8^4) = -0.3122.$$

$$\phi_{33} = -(-\theta)^3/(1+\theta^2+\theta^4+\theta^6) = -(-0.8)^3/(1+0.8^2+0.8^4+0.8^6) = 0.22147.$$

Ces coefficients peuvent être calculés à l'aide du logiciel R, tout en utilisant la commande `ARMAacf` avec l'option `(pacf = TRUE)`.

```
ARMAacf(ma = 0.8, lag.max = 5, pacf = T)
```

```
## [1] 0.4878 -0.3123 0.2215 -0.1652 0.1267
```

Les coefficients d'auto-corrélation partielle d'un processus $MA(1)$ décroissent exponentiellement en fonction de k et soit seront tous négatifs si $\theta < 0$, soit alterneront en signe si $\theta > 0$.

Le graphique suivant donne le corrélogramme partiel de deux processus $MA(1)$ avec $\theta = 0.8$ et $\theta = -0.8$.

```
ma1<-ARMAacf(ma=0.8, lag.max=21,pacf=T)
ma2<-ARMAacf(ma=-0.8, lag.max=21,pacf=T)
par(mfrow=c(1,2))
plot(0:20,ma1,type="h",ylim=c(-0.7,0.7),ylab="",xlab="",
     main=expression(italic(displaystyle(theta==0.8))))
points(0:20,ma1,pch=16)
abline(h=0)
plot(0:20,ma2,type="h",ylim=c(-0.7,0.7),ylab="",xlab="",
```

```
main=expression(italic(displaystyle(theta==-.8)))
points(0:20,ma2,pch=16)
abline(h=0)
```

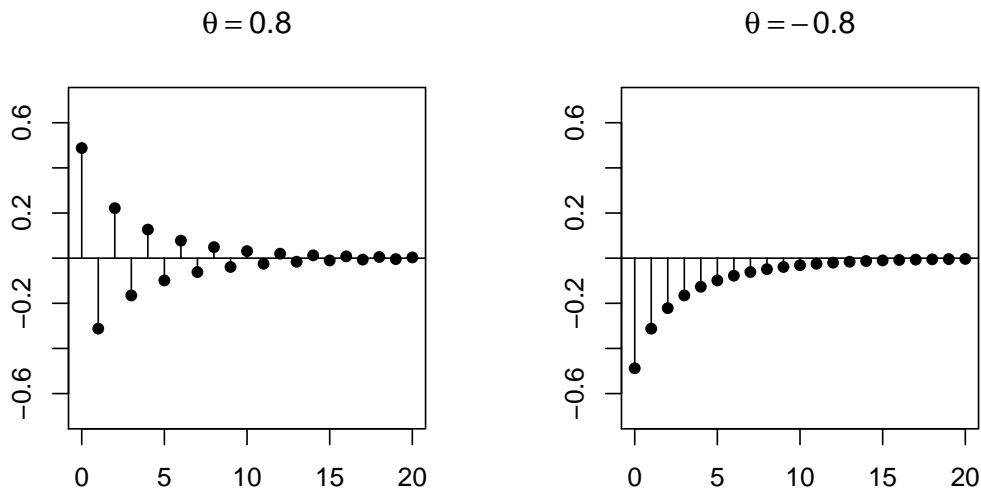


FIGURE 2.3 – PACF du processus MA(1) en fonction de θ .

La représentation AR(∞) du processus MA(1) : Lorsque le processus est **inversible** (i.e. $-1 < \theta < 1$), il admet une représentation AR(∞). Dans ce cas, on a :

$$X_t = \mu + \epsilon_t + \theta\epsilon_{t-1} = \mu + (1 + \theta L)\epsilon_t \iff \tilde{X}_t = X_t - \mu = \Theta(L)\epsilon_t$$

$$\iff \Pi(L) = (\Theta(L))^{-1} \tilde{X}_t = \epsilon_t$$

$$\text{or } (\Theta(L))^{-1} = \frac{1}{1 + \theta L} = 1 - \theta L + \theta^2 L^2 - \theta^3 L^3 + \dots = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} (-\theta)^j L^j$$

$$\text{d'où } \tilde{X}_t = (\theta L - \theta^2 L^2 + \theta^3 L^3 - \dots) \tilde{X}_t + \epsilon_t = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \theta^j \tilde{X}_{t-j} + \epsilon_t = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j \tilde{X}_{t-j} + \epsilon_t \sim AR(\infty).$$

Exemple 2.2

Déterminons les cinq premiers termes de l'écriture AR(∞) du processus suivant :

$$x_t = \epsilon_t + 0.7\epsilon_{t-1}$$

La représentation AR(∞) du processus MA(1) est donnée par :

$$x_t = (\theta L - \theta^2 L^2 + \theta^3 L^3 - \dots)x_t + \epsilon_t = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \theta^j x_{t-j} + \epsilon_t = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j x_{t-j} + \epsilon_t \sim AR(\infty).$$

En remplaçant θ par 0.7, on trouve :

j	0	1	2	3	4
π_j	1	-0.7	$(0.7)^2 = 0.49$	$-(0.7)^3 = -0.343$	$(0.7)^4 = 0.2401$

Pour déterminer ces coefficients à l'aide du logiciel R, on utilise la fonction `ARMAtoAR` qui est téléchargeable depuis l'adresse suivante <http://hamrita.e-monsite.com/medias/files/armatoar.txt>.

```
source("http://hamrita.e-monsite.com/medias/files/armatoar.txt")
ARMAtoAR(ar = 0, ma = 0.7, n.lags = 5)

## [1] 1.0000 -0.7000 0.4900 -0.3430 0.2401
```

Processus MA d'ordre 2

Soit $\{\epsilon_t\}$ un *BB* et on considère le processus $\{X_t\}$ défini par :

$$X_t = \mu + \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \theta_2 \epsilon_{t-2}, \quad (2.3.8)$$

ce processus est dit processus moyenne mobile d'ordre 2 et noté par *MA(2)* (on note $X_t \sim MA(2)$). Il est stationnaire pour toutes valeurs de θ_1 et θ_2 , et il est inversible seulement lorsque les racines de l'équation caractéristique $1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 = 0$ sont en dehors du cercle unité, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \theta_1 + \theta_2 &< 1 \\ \theta_2 - \theta_1 &< 1 \\ -1 < \theta_1 &< 1 \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

L'espérance du processus X_t est donnée par :

$$E(X_t) = E(\mu + \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \theta_2 \epsilon_{t-2}) = \mu + E(\epsilon_t) + \theta_1 E(\epsilon_{t-1}) + \theta_2 E(\epsilon_{t-2}) = \mu \quad (2.3.10)$$

La variance de X_t est :

$$\begin{aligned} V(X_t) &= E(X_t - \mu)^2 = E(\epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \theta_2 \epsilon_{t-2})^2 \\ &= E(\epsilon_t^2) + 2\theta_1 E(\epsilon_t \epsilon_{t-1}) + 2\theta_2 E(\epsilon_t \epsilon_{t-2}) + \theta_1^2 E(\epsilon_{t-1}^2) + 2\theta_1 \theta_2 E(\epsilon_{t-1} \epsilon_{t-2}) + \theta_2^2 E(\epsilon_{t-2}^2) \\ &= \sigma^2 + 0 + 0 + \theta_1^2 \sigma^2 + 0 + \theta_2^2 \sigma^2 \\ &= (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2) \sigma^2. \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

La fonction d'auto-covariance de X_t est :

$$\begin{aligned} \gamma(k) &= E(X_t - \mu)(X_{t-k} - \mu) \\ &= E(\epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \theta_2 \epsilon_{t-2})(\epsilon_{t-k} + \theta_1 \epsilon_{t-k-1} + \theta_2 \epsilon_{t-k-2}) \end{aligned}$$

Pour $k = 1$, on a :

$$\begin{aligned}
 \gamma(1) &= E(\epsilon_t + \theta_1\epsilon_{t-1} + \theta_2\epsilon_{t-2})(\epsilon_{t-1} + \theta_1\epsilon_{t-2} + \theta_2\epsilon_{t-3}) \\
 &= E(\theta_1\epsilon_{t-1}^2 + \theta_1\theta_2\epsilon_{t-2}^2) \\
 &= \theta_1\sigma^2 + \theta_1\theta_2\sigma^2 = \theta_1(1 + \theta_2)\sigma^2
 \end{aligned} \tag{2.3.12}$$

Pour $k = 2$, on a :

$$\begin{aligned}
 \gamma(2) &= E(\epsilon_t + \theta_1\epsilon_{t-1} + \theta_2\epsilon_{t-2})(\epsilon_{t-2} + \theta_1\epsilon_{t-3} + \theta_2\epsilon_{t-4}) \\
 &= E(\theta_2\epsilon_{t-2}^2) = \theta_2\sigma^2
 \end{aligned} \tag{2.3.13}$$

Et pour $k > 2$, on a $\gamma(k) = 0$.

Ainsi, la fonction d'auto-covariance d'un processus $MA(2)$ est donnée par :

$$\gamma(k) = \begin{cases} (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)\sigma^2, & \text{si } k = 0; \\ \theta_1(1 + \theta_2)\sigma^2, & \text{si } k = 1; \\ \theta_2\sigma^2, & \text{si } k = 2; \\ 0, & \text{si } k > 2. \end{cases} \tag{2.3.14}$$

La fonction d'auto-corrélation de ce processus est donnée par :

$$\rho(k) = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)} = \begin{cases} 1, & \text{si } k = 0; \\ \frac{\theta_1(1+\theta_2)}{1+\theta_1^2+\theta_2^2}, & \text{si } k = 1; \\ \frac{\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2}, & \text{si } k = 2; \\ 0, & \text{si } k > 2. \end{cases} \tag{2.3.15}$$

La représentation $AR(\infty)$: on a

$$\begin{aligned}
 X_t - \mu = \widetilde{X}_t &= \epsilon_t + \theta_1\epsilon_{t-1} + \theta_2\epsilon_{t-2} \\
 &= (1 + \theta_1L + \theta_2L^2)\epsilon_t = \Theta(L)\epsilon_t \\
 \Leftrightarrow \Theta(L)^{-1}\widetilde{X}_t &= \Pi(L)\widetilde{X}_t = \epsilon_t
 \end{aligned}$$

telle que : $\Pi(L)\Theta(L) = 1$, c-à-d :

$$\begin{aligned}
 (1 + \pi_1L + \pi_2L^2 + \dots)(1 + \theta_1L + \theta_2L^2) &= 1 \\
 1 + (\pi_1 + \theta_1)L + (\pi_2 + \pi_1\theta_1 + \theta_2)L^2 + (\pi_3 + \pi_2\theta_1 + \pi_1\theta_2)L^3 + \dots &= 1
 \end{aligned}$$

Par identification, on obtient :

$$\pi_1 + \theta_1 = 0 \Rightarrow \pi_1 = -\theta_1.$$

$$\pi_2 + \pi_1\theta_1 + \theta_2 = 0 \Rightarrow \pi_2 = -\pi_1\theta_1 - \theta_2 = \theta_1^2 - \theta_2.$$

$$\pi_3 + \pi_2\theta_1 + \pi_1\theta_2 = 0 \Rightarrow \pi_3 = -\pi_2\theta_1 - \pi_1\theta_2 = -\theta_1^3 + 2\theta_1\theta_2.$$

Et d'une manière générale, les coefficients π_j vérifient la relation suivante :

$$\pi_j + \pi_{j-1}\theta_1 + \pi_{j-2}\theta_2 = 0 \text{ pour tous } j > 1 \text{ avec } \pi_0 = 1.$$

Ainsi, la représentation $AR(\infty)$ d'un processus $MA(2)$ est donnée par :

$$\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j X_{t-j} = \mu + \epsilon_t$$

avec $\pi_0 = 1$, $\pi_1 = \theta_1^2 - \theta_2$ et $\pi_j = -\pi_{j-1}\theta_1 - \pi_{j-2}\theta_2 \forall j > 1$.

Exemple 2.3 : Étude d'un processus $MA(2)$

On considère le processus défini par :

$$x_t = 10 + \epsilon_t + 0.5\epsilon_{t-1} + 0.3\epsilon_{t-2}.$$

1. Étudier l'inversibilité de ce processus
2. Déterminer la ACF et les trois premiers coefficients de la PACF.
3. Donner la représentation $AR(\infty)$ de ce processus et donner les trois premiers coefficients de cette représentation.

1) Les processus MA sont toujours stationnaires, mais ne sont inversible que lorsque les racines du polynôme caractéristique associé sont tous en dehors du cercle unité. En particulier, les processus $MA(2)$ sont inversible lorsque :

$$\theta_1 + \theta_2 < 1$$

$$\theta_2 - \theta_1 < 1$$

$$-1 < \theta_1 < 1$$

Or,

$$\theta_1 + \theta_2 = 0.5 + 0.3 = 0.8 < 1$$

$$\theta_2 - \theta_1 = 0.3 - 0.5 = -0.2 < 1$$

$$\theta_1 = 0.5 \in]-1; 1[$$

Donc, ce processus est bien inversible.

Pour tester si un processus est inversible ou non avec R, on peut soit, utiliser la fonction `causal.inversible` qui téléchargeable depuis l'adresse suivante : <http://hamrita.e-monsite.com/medias/files/causal-inversible.txt>, soit utiliser la fonction `armaRoots` de l'extension `fArma` qui donne la représentation des racines du polynôme caractéristique.

```
source("http://hamrita.e-monsite.com/medias/files/causal-inversible.txt")
causal.inversible(ma = c(0.5, 0.3))

##
## Le processus est causal et inversible
```

2) Le processus $MA(2)$ possède deux coefficients de corrélation non nuls.

$$\rho(1) = \frac{\theta_1(1 + \theta_1)}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} = \frac{0.5(1 + 0.3)}{1 + 0.5^2 + 0.3^2} = 0.4850746.$$

$$\rho(1) = \frac{\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} = \frac{0.3}{1 + 0.5^2 + 0.3^2} = 0.2238806.$$

$$\rho(k) = 0 \quad \forall k > 2.$$

Les corrélations partielles sont données comme suit :

$$\phi_{11} = \rho(1) = 0.4850746.$$

$$\phi_{22} = \frac{\mathcal{R}^*(2)}{\mathcal{R}(2)} = \frac{\begin{vmatrix} \rho(0) & \rho(1) \\ \rho(1) & \rho(2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \rho(0) & \rho(1) \\ \rho(1) & \rho(0) \end{vmatrix}} = \frac{\rho(0)\rho(2) - \rho^2(1)}{\rho^2(0) - \rho^2(1)} = -0.01492972$$

$$\text{et } \phi_{33} = \frac{\mathcal{R}^*(3)}{\mathcal{R}(3)} = \frac{\begin{vmatrix} \rho(0) & \rho(1) & \rho(1) \\ \rho(1) & \rho(0) & \rho(2) \\ \rho(2) & \rho(1) & \rho(3) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \rho(0) & \rho(1) & \rho(2) \\ \rho(1) & \rho(0) & \rho(1) \\ \rho(2) & \rho(1) & \rho(0) \end{vmatrix}} = -0.13469429$$

```
ARMAacf(ma = c(0.5, 0.3), lag.max = 5) # Corrélations
##      0      1      2      3      4      5
## 1.0000 0.4851 0.2239 0.0000 0.0000 0.0000

ARMAacf(ma = c(0.5, 0.3), lag.max = 5, pacf = T) # Corrélations partielles
## [1] 0.485075 -0.014930 -0.134694 0.071714 0.004339
```

Les coefficients d'auto-corrélation partielle d'un processus $MA(2)$ décroissent exponentiellement en fonction de k et leur signe dépend du celui des coefficients θ_1 et θ_2 .

```
ma1<-ARMAacf(ma=c(0.5,0.3), lag.max=21,pacf=T)
ma2<-ARMAacf(ma=c(-0.5,-0.3), lag.max=21,pacf=T)
ma3<-ARMAacf(ma=c(-0.5,0.3), lag.max=21,pacf=T)
ma4<-ARMAacf(ma=c(0.5,-0.3), lag.max=21,pacf=T)
par(mfrow=c(2,2))
plot(0:20,ma1,type="h",ylim=c(-0.6,0.6),ylab="",xlab="",

      main=expression(paste(theta[1]==0.5," ", " ", theta[2]==0.3)))
points(0:20,ma1,pch=16)
abline(h=0)
```

```

plot(0:20,ma2,type="h",ylim=c(-0.6,0.6),ylab="",xlab="",

      main=expression(paste(theta[1]==-0.5, " , " ,theta[2]==-0.3)))
points(0:20,ma2,pch=16)
abline(h=0)
plot(0:20,ma3,type="h",ylim=c(-0.6,0.6),ylab="",xlab="",

      main=expression(paste(theta[1]==-0.5, " , " , theta[2]==0.3)))
points(0:20,ma3,pch=16)
abline(h=0)
plot(0:20,ma4,type="h",ylim=c(-0.6,0.6),ylab="",xlab="",

      main=expression(paste(theta[1]==0.5, theta[2]==-0.3)))
points(0:20,ma4,pch=16)
abline(h=0)

```

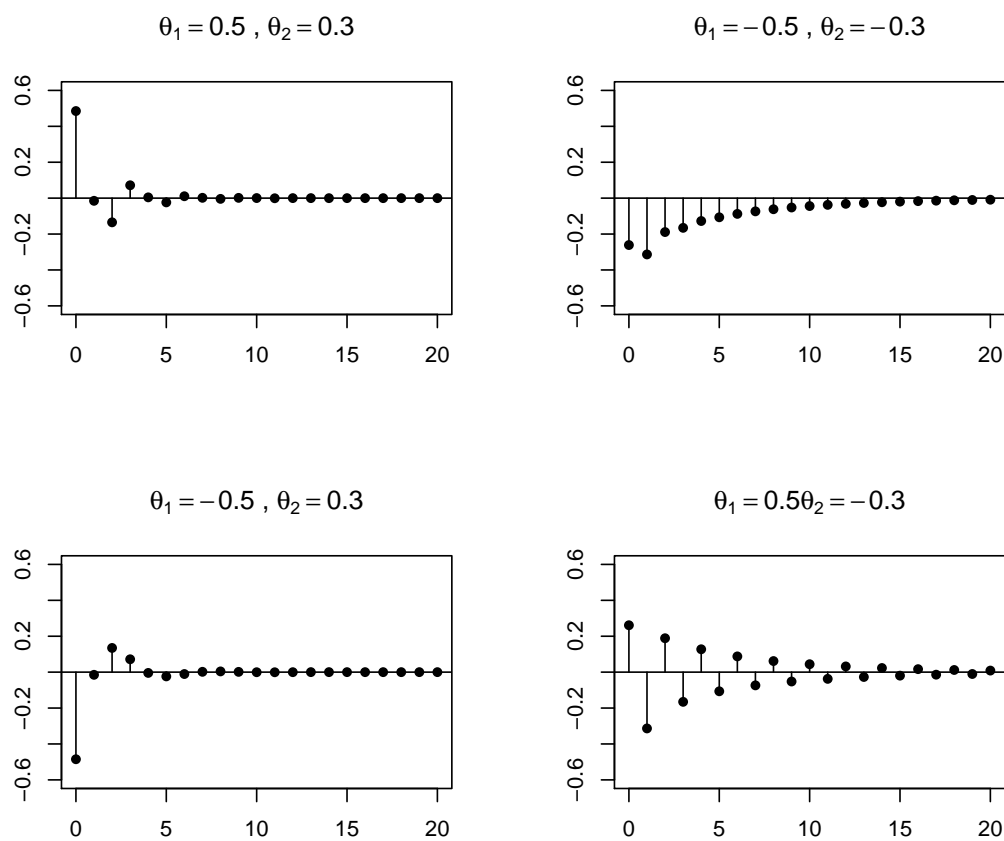


FIGURE 2.4 – PACF du processus MA(2) en fonction de θ_1 et θ_2 .

3) Le processus est inversible, donc il admet une représentation $AR(\infty)$.

$$\begin{aligned}
 X_t - \mu = \widetilde{X}_t &= \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \theta_2 \epsilon_{t-2} \\
 &= (1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2) \epsilon_t = \Theta(L) \epsilon_t \\
 \Leftrightarrow \Theta(L)^{-1} \widetilde{X}_t &= \Pi(L) \widetilde{X}_t = \epsilon_t
 \end{aligned}$$

telle que : $\Pi(L)\Theta(L) = 1$, c-à-d :

$$\begin{aligned}(1 + \pi_1 L + \pi_2 L^2 + \dots)(1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2) &= 1 \\ 1 + (\pi_1 + \theta_1)L + (\pi_2 + \pi_1\theta_1 + \theta_2)L^2 + (\pi_3 + \pi_2\theta_1 + \pi_1\theta_2)L^3 + \dots &= 1\end{aligned}$$

Par identification, on obtient :

$$\pi_1 + \theta_1 = 0 \implies \pi_1 = -\theta_1 = -0.5.$$

$$\pi_2 + \pi_1\theta_1 + \theta_2 = 0 \implies \pi_2 = -\pi_1\theta_1 - \theta_2 = \theta_1^2 - \theta_2 = -0.05.$$

$$\pi_3 + \pi_2\theta_1 + \pi_1\theta_2 = 0 \implies \pi_3 = -\pi_2\theta_1 - \pi_1\theta_2 = -\theta_1^3 + 2\theta_1\theta_2 = 0.175.$$

Et d'une manière générale, les coefficients π_j vérifient la relation suivante :

$$\pi_j + \pi_{j-1}\theta_1 + \pi_{j-2}\theta_2 = 0 \text{ pour tous } j > 1 \text{ avec } \pi_0 = 1.$$

```
source("http://hamrita.e-monsite.com/medias/files/armatoar.txt")
round(ARMAtoAR(ar = 0, ma = c(0.5, 0.3), n.lags = 10), 4)

## [1] 1.0000 -0.5000 -0.0500 0.1750 -0.0725 -0.0162 0.0299 -0.0101
## [9] -0.0039 0.0050
```

Processus MA d'ordre q

Un processus est dit moyenne mobile d'ordre q , noté par $MA(q)$, s'il admet l'écriture suivante :

$$X_t = \mu + \epsilon_t + \theta_1\epsilon_{t-1} + \dots + \theta_q\epsilon_{t-q} \text{ où } \epsilon_t \sim BB(0, 1). \quad (2.3.16)$$

Ce processus est toujours stationnaire, mais il est inversible que lorsque les racines (en module) du polynôme caractéristique associé sont touen dehors du cercles unité. C'est-à-dire :

$$X_t \text{ est inversible } \iff ((1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \dots + \theta_q L^q) = 0 \implies |L_i| > 1).$$

Le processus $MA(q)$ possède les caractéristiques suivantes :

L'espérance : $E(X_t) = \mu$.

La fonction d'auto-covariance :

$$\gamma(k) = \begin{cases} \sigma^2 \sum_{j=0}^{q-k} \theta_j \theta_{j+k}, & k \leq q; \\ 0, & k > q. \end{cases}$$

où $\theta_0 = 1$, $\theta_j = 0$ pour tout $j > q$

La fonction d'auto-corrélation :

$$\rho(k) = \begin{cases} 1, & k = 0; \\ \frac{\sum_{j=0}^{q-k} \theta_j \theta_{j+k}}{\sum_{j=0}^q \theta_j^2}, & 1 \leq k \leq q; \\ 0, & k > q \end{cases}$$

On voit bien que la ACF d'un processus $MA(q)$ est nulle au-delà de l'ordre q .

2.3.2 Processus AR

Processus AR(1)

Un processus est dit processus auto-regressive d'ordre 1, noté $AR(1)$, s'il admet l'écriture suivante :

$$X_t = \mu + \phi X_{t-1} + \epsilon_t \text{ où } \epsilon \sim BB(0, \sigma^2) \quad (2.3.17)$$

Ce processus est stationnaire lorsque $|\phi| < 1$ et il est toujours inversible. Ce processus admet les caractéristiques suivantes :

L'espérance : Pour déterminer l'espérance d'un processus stationnaire $AR(1)$, il est à noter que ce processus admet l'écriture suivante :

$$\begin{aligned} X_t &= \mu + \phi E(X_{t-1} + E(\epsilon_t)) \iff (1 - \phi L)X_t = \mu + \epsilon_t \\ &= (1 - \phi L)^{-1}(\mu + \epsilon_t) \\ &= (1 + \phi L + \phi^2 L^2 + \dots)(\mu + \epsilon_t) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} E(X_t) &= E((1 + \phi L + \phi^2 L^2 + \dots)\mu) + E((1 + \phi L + \phi^2 L^2 + \dots)\epsilon_t) \\ &= E((1 + \phi + \phi^2 + \dots)\mu) + E(\epsilon_t + \epsilon_{t-1} + \dots) \\ &= \frac{\mu}{1 - \phi} \end{aligned} \quad (2.3.18)$$

car $E(\epsilon_t) = E(\epsilon_{t-1}) = E(\epsilon_{t-2}) = \dots = 0$ et $(1 + \phi + \phi^2 + \dots)$ est la somme infinie d'une suite géométrique de raison $q = \phi$ et de premier terme égale à 1. Donc, $(1 + \phi + \phi^2 + \dots) = \frac{1}{1 - \phi}$.

La variance : On sait que : $V(X_t) = E(X_t - E(X_t))^2 = \gamma(0)$.

Or,

$$\begin{aligned}
 X_t - E(X_t) &= (1 - \phi L)^{-1}(\mu + \epsilon_t) - \frac{\mu}{1 - \phi} \\
 &= \frac{\mu}{1 - \phi} + (\epsilon_t + \phi\epsilon_{t-1} + \phi^2\epsilon_{t-2} + \dots) - \frac{\mu}{1 - \phi} \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \epsilon_{t-j}
 \end{aligned}$$

D'où $E(X_t - E(X_t))^2 = E(\epsilon_t + \phi\epsilon_{t-1} + \phi^2\epsilon_{t-2} + \dots)^2$. Et puisque $E(\epsilon_t\epsilon_s) = 0, \forall t \neq s$, on aura :

$$\begin{aligned}
 \gamma(0) &= E(\epsilon_t^2) + \phi^2 E(\epsilon_{t-1}^2) + \phi^4 E(\epsilon_{t-2}^2) + \dots \\
 &= (1 + \phi^2 + \phi^4 + \phi^6 + \dots)\sigma^2 \\
 &= \frac{\sigma^2}{1 - \phi^2}
 \end{aligned} \tag{2.3.19}$$

La fonction d'auto-covariance : On peut déterminer la fonction d'auto-covariance en raisonnant de la même manière. La fonction d'auto-covariance est définie par :

$$\gamma(k) = E(X_t - E(X_t))(X_{t-k} - E(X_{t-k}))$$

En utilisant les résultats suivants :

$$X_t - E(X_t) = \epsilon_t + \phi\epsilon_{t-1} + \phi^2\epsilon_{t-2} + \dots \tag{2.3.20}$$

$$X_{t-k} - E(X_{t-k}) = \epsilon_{t-k} + \phi\epsilon_{t-k-1} + \phi^2\epsilon_{t-k-2} + \dots \tag{2.3.21}$$

on trouve :

$$\begin{aligned}
 \gamma(k) &= E[(\epsilon_t + \phi\epsilon_{t-1} + \phi^2\epsilon_{t-2} + \dots + \phi^k\epsilon_{t-k} + \phi^{k+1}\epsilon_{t-k-1} + \dots) \\
 &\quad \times (\epsilon_{t-k} + \phi\epsilon_{t-k-1} + \phi^2\epsilon_{t-k-2} + \dots)] \\
 &= \phi^k E(\epsilon_{t-k})^2 + \phi^{k+2} E(\epsilon_{t-k-1})^2 + \phi^{k+4} E(\epsilon_{t-k-2})^2 + \dots \\
 &= \phi^k (1 + \phi^2 + \phi^4 + \dots)\sigma^2 \\
 &= \frac{\phi^k}{1 - \phi^2} \sigma^2 = \phi^k \gamma(0).
 \end{aligned} \tag{2.3.22}$$

La fonction d'auto-corrélation : La ACF est définie par : $\rho(k) = \gamma(k)/\gamma(0)$. Donc $\rho(k) = \phi^k$.

On remarque bien que la ACF d'un processus $AR(1)$ décroît exponentiellement ($|\phi| < 1$).

Ainsi, la matrice des corrélations est donnée par :

$$\mathcal{R}(k) = \begin{pmatrix} 1 & \phi & \dots & \phi^{k-1} \\ \phi & 1 & \dots & \phi^{k-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi^{k-1} & \phi^{k-2} & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (2.3.23)$$

Donc, les coefficients d'auto-corrélations partielles sont données par :

$$\begin{aligned} \phi_{11} &= \rho(1) = \phi \\ \phi_{22} &= \frac{\begin{vmatrix} \rho(0) & \rho(1) \\ \rho(1) & \rho(2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \rho(0) & \rho(1) \\ \rho(1) & \rho(0) \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \phi \\ \phi & \phi^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \phi \\ \phi & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\phi^2 - \phi^2}{1 - \phi^2} = 0 \end{aligned}$$

et

$$\phi_{kk} = 0, \forall k > 1.$$

Un processus $AR(1)$ est caractérisé par une décroissance exponentielle des auto-corrélations (soit seront toutes positives si $\phi > 0$, soit alterneront en signe si $\phi < 0$) et par une seule auto-corrélation partielle non nulle.

Le graphique suivant donne les corrélations simples et partielles (théorique) des processus suivants :

$$X_t = 0.7X_{t-1} + \epsilon_t$$

$$X_t = -0.7X_{t-1} + \epsilon_t$$

```
ar1<-ARMAacf(ar=0.7, lag.max=21)
ar1p<-ARMAacf(ar=0.7, lag.max=21,pacf=T)
ar2<-ARMAacf(ar=-0.7, lag.max=21)
ar2p<-ARMAacf(ar=-0.7, lag.max=21,pacf=T)
par(mfrow=c(2,2),mar=c(4, 4, 2, 0.5))
plot(0:21,ar1,type="h",ylim=c(-1.2,1.2),ylab="ACF",xlab="",
     main=expression(phi==0.7))
points(0:21,ar1,pch=16)
abline(h=0)
plot(0:20,ar1p,type="h",ylim=c(-0.8,0.8),ylab="PACF",xlab="",
     main=expression(phi==0.7))
points(0:20,ar1p,pch=16)
abline(h=0)
plot(0:21,ar2,type="h",ylim=c(-1.2,1.2),ylab="ACF",xlab="",
     main=expression(phi==0.7))
points(0:21,ar2,pch=16)
abline(h=0)
plot(0:20,ar2p,type="h",ylim=c(-0.8,0.8),ylab="PACF",xlab="",
     main=expression(phi==0.7))
points(0:20,ar2p,pch=16)
abline(h=0)
```

```

main=expression(phi==0.7)
points(0:20,ar2p,pch=16)
abline(h=0)

```

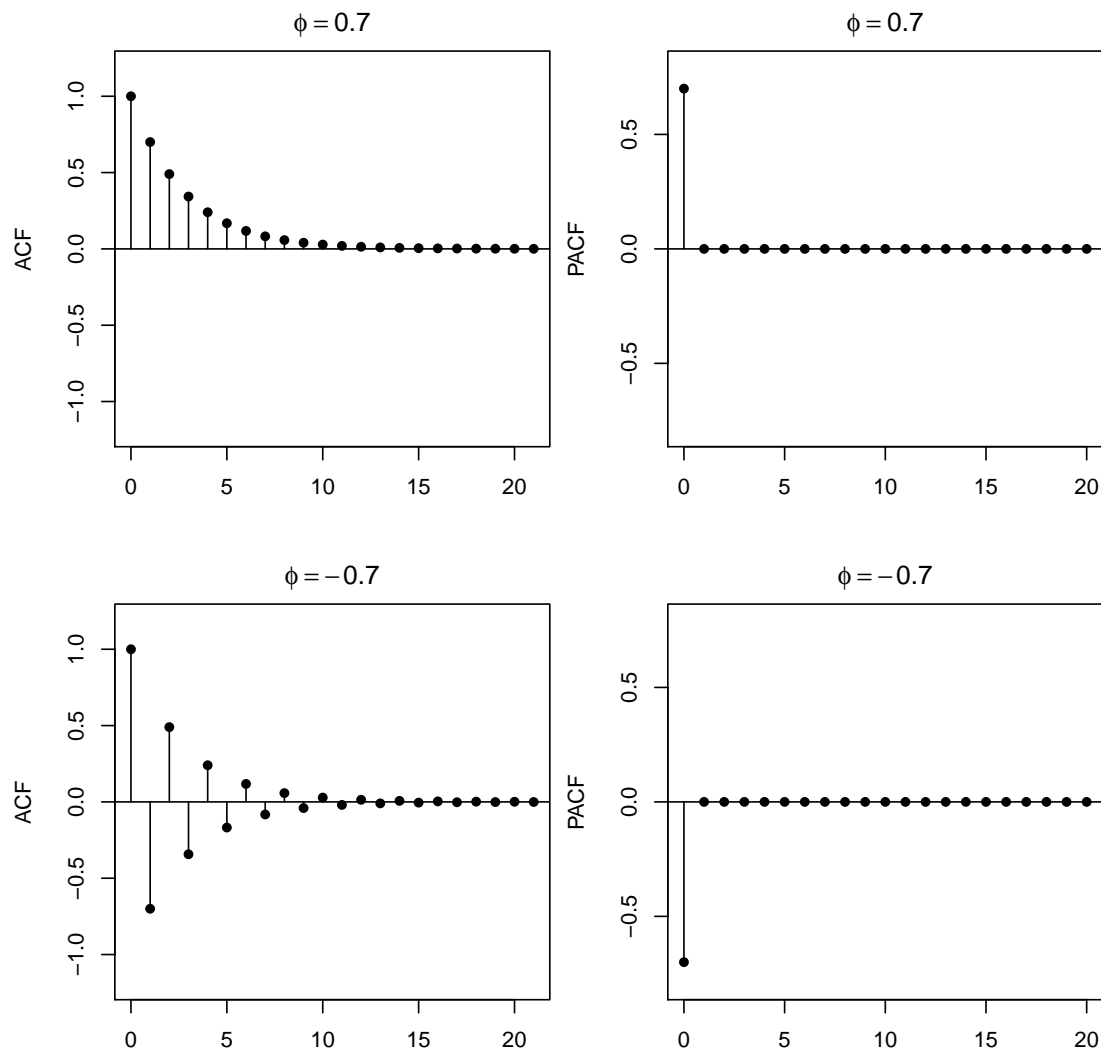


FIGURE 2.5 – ACF et PACF du processus AR(1) en fonction de ϕ .

Exemple 2.4 : Étude d'un processus AR(1)

On considère le processus défini par :

$$x_t = 0.5x_{t-1} + \epsilon_t, \text{ où } \epsilon_t \sim BB(0, 1)$$

1. Ce processus est-il stationnaire ? Inversible ? Justifier.
 2. Déterminer les cinq premiers coefficients de la ACF et donner la PACF de ce processus.
 3. Donner la représentation $MA(\infty)$ de ce processus.
-

1) Étant donné que $|\phi| = 0.5 < 1$, alors le processus est stationnaire. Ce processus est un processus AR, donc il est inversible (Les processus AR sont toujours inversible).

2) La ACF est définie par : $\rho(k) = \gamma(k)/\gamma(0)$. Or, $\gamma(k) = E(x_t x_{t-k})$. On a : $x_t = 0.5x_{t-1} + \epsilon_t$. Multiplions les deux membres de cette équation par x_{t-k} , puis appliquons l'opérateur espérance, on obtient :

$$\gamma(k) = E(x_t x_{t-k}) = 0.5E(x_{t-1} x_{t-k}) + E(x_{t-k} \epsilon_t) = 0.5E(x_{t-1} x_{t-k}) = 0.5\gamma(k-1)$$

Divisons la dernière équation par $\gamma(0)$, on aura :

$$\rho(k) = 0.5\rho(k-1), \text{ avec } \rho(0) = 1$$

Ainsi, $\rho(k) = 0.5^k, \forall k$. D'où, on déduit les cinq premiers coefficient de la ACF.

k	0	1	2	3	4
$\rho(k)$	1	0.5	0.25	0.125	0.0625

La PACF d'un processus AR(1) est nulle sauf pour le premier coefficient qui est égale à : $\phi_{11} = \rho(1) = 0.5$. Ainsi, on a :

$$\phi_{kk} = \begin{cases} 0.5, & \text{si } k = 1 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Avec R, on utilise la fonction `ARMAacf` pour déterminer les coefficients d'auto-corrélation et d'auto-corrélation partielle (avec l'option `pacf=T`).

```
ARMAacf(ar = 0.5, lag.max = 5) #corrélations
##      0      1      2      3      4      5
## 1.00000 0.50000 0.25000 0.12500 0.06250 0.03125

ARMAacf(ar = 0.5, lag.max = 5, pacf = T) #corrélations partielles
## [1] 0.5 0.0 0.0 0.0 0.0
```

3) Le processus est stationnaire, donc il admet une représentation $MA(\infty)$.

On a : $x_t = 0.5x_{t-1} + \epsilon_t \iff (1 - 0.5L)x_t = \epsilon_t$. Donc

$$x_t = (1 - 0.5L)^{-1} \epsilon_t = (1 + 0.5 + 0.5^2 + \dots + 0.5^j + \dots) \epsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} 0.5^j \epsilon_{t-j}$$

Pour déterminer ces coefficients avec R, on peut utiliser la fonction `ARMAtoMA`.

```
ARMAtoMA(ar = 0.5, lag.max = 6)
## [1] 0.50000 0.25000 0.12500 0.06250 0.03125 0.01562
```

Processus AR(2)

Le processus AR(2) est défini par :

$$\begin{aligned}
 X_t &= \mu + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \epsilon_t \text{ où } \epsilon \sim BB(0, \sigma^2) \\
 \Leftrightarrow & (1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2) X_t = \mu + \epsilon_t \\
 \Leftrightarrow & \Phi(L) X_t = \mu + \epsilon_t
 \end{aligned}
 \tag{2.3.24}$$

Ce processus est stationnaire si l'équation $\Phi(L) = 0$ admet des racines en dehors du cercle unité ($L_i > 1$). Cette condition est remplie lorsque :

$$\begin{cases}
 \phi_1 + \phi_2 < 1 \\
 \phi_2 - \phi_1 < 1 \\
 |\phi_2| < 1
 \end{cases}
 \tag{2.3.25}$$

Le graphique suivant donne la représentation de la région de stationnarité en fonction de ϕ_1 et ϕ_2 .

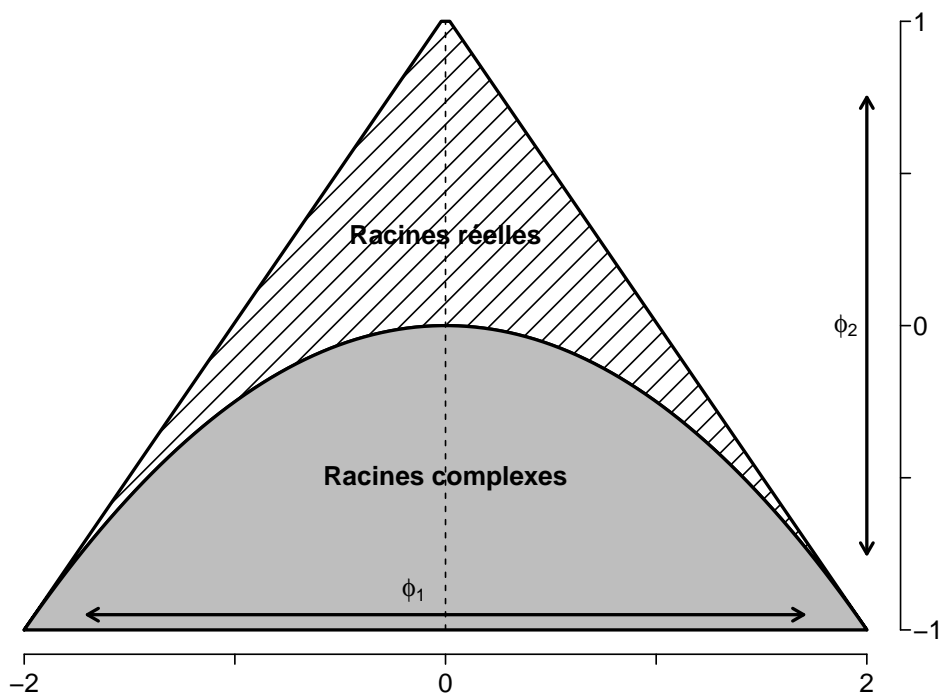


FIGURE 2.6 – Région de stationnarité d'un processus AR(2)

Il est à noter que ce processus est inversible pour toutes valeurs de $\phi_i; i = 1, 2$.

Un processus AR(2) possède les caractéristiques suivantes :

L'espérance :

$$\begin{aligned}
 E(X_t) &= \mu + \phi_1 E(X_{t-1}) + \phi_2 E(X_{t-2}) + E(\epsilon_t) \\
 &= \mu + \phi_1 E(X_t) + \phi_2 E(X_t) + 0 = \mu + (\phi_1 + \phi_2)E(X_t) \\
 &= \frac{\mu}{1 - \phi_1 - \phi_2}
 \end{aligned} \tag{2.3.26}$$

La variance est donnée par $V(X_t) = \gamma(0) = E[(X_t - E(X_t))^2] = E(\tilde{X}_t^2)$ avec $\tilde{X}_t = X_t - E(X_t)$.

$$\begin{aligned}
 \gamma(0) &= E(\phi_1 \tilde{X}_{t-1} \tilde{X}_t + \phi_2 \tilde{X}_{t-2} \tilde{X}_t + \tilde{X}_t \epsilon_t) \\
 &= \phi_1 \gamma(1) + \phi_2 \gamma(2) + \sigma^2
 \end{aligned} \tag{2.3.27}$$

car, $E(\tilde{X}_t \epsilon_t) = E((\phi_1 \tilde{X}_{t-1} + \phi_2 \tilde{X}_{t-2} + \epsilon_t) \epsilon_t) = E(\epsilon_t^2) = \sigma^2$.

Et d'une manière plus générale, on peut montrer que :

$$\gamma(k) = \phi_1 \gamma(k-1) + \phi_2 \gamma(k-2), \text{ pour tous } k > 0. \tag{2.3.28}$$

Et puisque $\gamma(k) = \gamma(-k)$, on aura :

$$\gamma(1) = \phi_1 \gamma(0) + \phi_2 \gamma(1) \tag{2.3.29}$$

$$\gamma(2) = \phi_1 \gamma(1) + \phi_2 \gamma(0) \tag{2.3.30}$$

D'après les équation (2.3.27), (2.3.29) et (2.3.30), on obtient :

$$\gamma(0) = \frac{(1 - \phi_2)\sigma^2}{(1 + \phi_2)(1 - \phi_1 - \phi_2)(1 + \phi_1 - \phi_2)} \tag{2.3.31}$$

La fonction d'auto-corrélation est donnée par : $\rho(k) = \gamma(k)/\gamma(0)$. Donc,

$$\rho(1) = \frac{\gamma(1)}{\gamma(0)} = \frac{\phi_1 \gamma(0) + \phi_2 \gamma(1)}{\gamma(0)} = \phi_1 \rho(0) + \phi_2 \rho(1) \tag{2.3.32}$$

$$\rho(2) = \frac{\gamma(2)}{\gamma(0)} = \frac{\phi_1 \gamma(1) + \phi_2 \gamma(0)}{\gamma(0)} = \phi_1 \rho(1) + \phi_2 \rho(0) \tag{2.3.33}$$

Et d'une manière générale, on a la relation suivante :

$$\rho(k) = \phi_1 \rho(k-1) + \phi_2 \rho(k-2) \tag{2.3.34}$$

Ces équations s'appellent **équations de Yulle-Walker**.

Représentation MA(∞) : Lorsque le processus est stationnaire, il admet un écriture MA(∞). La détermination des coefficients de la représentation MA(∞) d'un processus AR(2) est plus complexe que dans le cas d'un processus AR(1).

On a $X_t = \tilde{X}_t = \phi_1 \tilde{X}_{t-1} + \phi_2 \tilde{X}_{t-2} + \epsilon_t$ où $\tilde{X}_t = X_t - E(X_t)$. Donc, ce processus peut s'écrire comme

suit :

$$\begin{aligned}
 \tilde{X}_t &= (\phi_1 L + \phi_2 L^2) \tilde{X}_t + \epsilon_t \\
 \underbrace{(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2)}_{\Phi(L)} \tilde{X}_t &= \epsilon_t \\
 \tilde{X}_t &= \Phi(L)^{-1} \epsilon_t = \Psi(L) \epsilon_t \\
 &= (\psi_0 + \psi_1 L + \psi_2 L^2 + \dots) \epsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \epsilon_{t-j}
 \end{aligned} \tag{2.3.35}$$

Les coefficients ψ_j se déterminent par identification :

$$\begin{aligned}
 \Psi(L)\Phi(L) &= 1 \\
 (\psi_0 + \psi_1 L + \psi_2 L^2 + \dots)(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2) &= 1 \\
 \psi_0 + (\psi_1 - \phi_1 \psi_0)L + (\psi_2 - \phi_1 \psi_1 - \phi_2 \psi_0)L^2 + \dots &= 1
 \end{aligned} \tag{2.3.36}$$

On obtient :

$$\begin{cases} \psi_0 = 1, \\ \psi_1 = \phi_1 \psi_0, \\ \psi_j = \phi_1 \psi_{j-1} + \phi_2 \psi_{j-2}, \quad \text{pour } j = 2, 3, \dots \end{cases} \tag{2.3.37}$$

Et en résolvant ses équations d'une manière recursive, on aura : $\psi_1 = \phi_1$, $\psi_2 = \phi_1^2 + \phi_2$ et ainsi de suite.

On peut aussi, montrer que ces coefficients peuvent être déterminés explicitement comme suit (voir [Cryer et Chan, 2008](#), page 75) :

$$\psi_j = \begin{cases} \frac{z_1^{j+1} - z_2^{j+1}}{z_1 - z_2}, & \text{si } z_1 \neq z_2 \\ (1+j)\phi_1^j, & \text{si } z_1 = z_2 \end{cases} \tag{2.3.38}$$

où z_i sont les inverses des racines du polynôme caractéristique ($\Phi(L_i) = 0$, $z_i = 1/L_i$).

Lorsque les racines du polynôme caractéristique sont complexes, les coefficients ψ_j peuvent être donnés par :

$$\psi_j = R^j \frac{\sin[(j+1)\theta]}{\sin(\theta)} \tag{2.3.39}$$

où $R = \sqrt{-\phi_2}$ et θ tel que : $\cos(\theta) = \phi_1 / (2\sqrt{-\phi_2})$

Exemple 2.5 : Étude d'un processus AR(2)

On considère le processus x_t défini par :

$$x_t = 0.7x_{t-1} + 0.1x_{t-2} + \epsilon_t, \text{ où } \epsilon_t \sim BB(0,1)$$

1. Vérifier que ce processus est stationnaire. Donner la moyenne et la variance de ce processus.
2. Déterminer la ACF et calculer ses cinq premiers coefficients
3. Déterminer la PACF.
4. Donner l'écriture $MA(\infty)$ de ce processus et calculer les cinq premiers coefficients de ψ_j .

1) Un processus AR(2) est stationnaire si : $\phi_2 - \phi_1 < 1$, $\phi_1 + \phi_2 < 1$ et $|\phi_2| < 1$. Or, on a : $\phi_2 - \phi_1 = 0.1 - 0.7 = -0.6 < 1$, $\phi_1 + \phi_2 = 0.8 < 1$ et $|\phi_2| = 0.1 < 1$, donc le processus est stationnaire.

2) La ACF d'un processus stationnaire est donnée par : $\rho(k) = \gamma(k)/\gamma(0)$, avec :

$$\gamma(k) = E(x_{t-k}x_t) = \phi_1 E(x_{t-k}x_{t-1}) + \phi_2 E(x_{t-k}x_{t-2}), \text{ pour } k = 1, 2, \dots$$

D'où, $\gamma(k) = \phi_1\gamma(k-1) + \phi_2\gamma(k-2) \implies \rho(k) = \phi_1\rho(k-1) + \phi_2\rho(k-2)$, pour $k = 1, 2, \dots$. D'où :

$$\rho(k) = \begin{cases} 1, & \text{si } k = 0 \\ \phi_1\rho(k-1) + \phi_2\rho(k-2), & \text{si } k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Donc :

$$\rho(1) = \phi_1\rho(0) + \phi_2\rho(0) \implies \rho(1) = \frac{\phi_1\rho(0)}{1 - \phi_2} = \frac{0.7 \times 1}{1 - 0.1} = 0.7777778$$

$$\rho(2) = \phi_1\rho(1) + \phi_2\rho(0) \implies \rho(2) = 0.7 \times 0.7777 + 0.1 = 0.6444444$$

Et on procède de la même façon pour déterminer les autres coefficients.

k	0	1	2	3	4	5
$\rho(k)$	1	0.777	0.644	0.528	0.4346	0.3571

Avec R, on calcule ces coefficients en utilisant la fonction `ARMAacf`.

```
ARMAacf(ar = c(0.7, 0.1), lag.max = 5)
```

```
##      0      1      2      3      4      5
## 1.0000 0.7778 0.6444 0.5289 0.4347 0.3572
```

3) La PACF d'un processus AR(2) est nulle sauf les deux premières corrélations qui sont différents de zéro.

$$\phi_{11} = \rho(1) = 0.777,$$

$$\phi_{22} = \frac{\begin{vmatrix} \rho(0) & \rho(1) \\ \rho(1) & \rho(2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \rho(0) & \rho(1) \\ \rho(1) & \rho(0) \end{vmatrix}} = \frac{\rho(0) \times \rho(2) - \rho(1)^2}{\rho(0)^2 - \rho(1)^2} = \frac{0.644 - 0.777^2}{1 - 0.777^2} = 0.1.$$

Ainsi la PACF est donnée par :

$$\phi_{kk} = \begin{cases} 0.77778, & \text{si } k = 1 \\ 0.100, & \text{si } k = 2 \\ 0, & \text{si } k = 3, 4, \dots \end{cases}$$

Avec R, ces coefficients se déduisent à l'aide de la fonction `ARMAacf` avec l'option (`pacf=TRUE`).

```
round(ARMAacf(ar = c(0.7, 0.1), lag.max = 5, pacf = T), 5)
```

```
## [1] 0.7778 0.1000 0.0000 0.0000 0.0000
```

4) Le processus est stationnaire, donc il admet une représentation $MA(\infty)$. On peut déterminer les coefficients de cette représentation de deux manières ; soit par identification, soit explicitement en appliquant les équation (2.3.38) ou (2.3.39).

Première méthode :

On a : $\Phi(L) = 1 - 0.7L - 0.1L^2$ et $\Psi(L) = \psi_0 + \psi_1L + \psi_2L^2 + \dots$, tel que :

$$\Phi(L)\Psi(L) = 1 \iff (\psi_0 + \psi_1L + \psi_2L^2 + \dots)(1 - \phi_1L - \phi_2L^2) = 1.$$

$$\psi_0 + (\psi_1 - \phi_1\psi_0)L + (\psi_2 - \phi_1\psi_1 - \phi_2\psi_0)L^2 + \dots = 1. \text{ D'où, on aura :}$$

$$\begin{cases} \psi_0 = 1, \\ \psi_1 = \phi_1\psi_0 = 0.7, \\ \psi_j = \phi_1\psi_{j-1} + \phi_2\psi_{j-2} = 0.7\psi_{j-1} + 0.1\psi_{j-2}, \quad \text{pour } j = 2, 3, \dots \end{cases}$$

En appliquant la dernière équation, on obtient les cinq premiers coefficients de ψ_j :

j	0	1	2	3	4	5
ψ_j	1	0.7	0.59	0.483	0.3971	0.32627

Avec R :

```
ARMAtoMA(ar = c(0.7, 0.1), lag.max = 5)
```

```
## [1] 0.7000 0.5900 0.4830 0.3971 0.3263
```

Deuxième méthode : pour appliquer cette méthode, tout d'abord on a besoin de déterminer les racines du polynôme caractéristique associé au processus.

$$\Phi(x) = 0 \iff 1 - 0.7x - 0.1x^2 = 0.$$

C'est une équation de second ordre à une inconnue. Calculons le discriminant de cette équation :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-0.7)^2 - 4 \times (-0.1) = 0.89 = 0.9433^2.$$

Le discriminant est positif, donc le polynôme caractéristique admet deux racines réelle distinctes.

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{0.7 - 0.9433}{-0.2} = 1.217 \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{0.7 + 0.9433}{-0.2} = -8.217.$$

Donc, $z_1 = 1/x_1 = 0.8217$, $z_2 = 1/x_2 = -0.1217$ et $\psi_j = \frac{z_1^{j+1} - z_2^{j+1}}{z_1 - z_2}$.

$$\psi_1 = \frac{0.8217^2 - (-0.1217)^2}{0.8217 - (-0.1217)} = 0.7; \psi_2 = \frac{0.8217^3 - (-0.1217)^3}{0.8217 - (-0.1217)} = 0.59$$

et ainsi de suite.

Remarque : On peut déterminer les racines z_1 et z_2 en cherchant les racines de l'équation $\Phi(z) = \Phi(1/x) = 0$ (i.e. $z^2 - 0.7z - 0.1 = 0$)

```
(xi <- polyroot(c(1, -0.7, -0.1))) # Calcul des racines du polynôme.
## [1] 1.217+0i -8.217-0i
(z <- 1/Re(xi)) # Calcul des zi.
## [1] 0.8217 -0.1217
(Re(polyroot(c(-0.1, -0.7, 1)))) # Calcul des zi autrement.
## [1] -0.1217 0.8217
j <- 5
(psij <- (z[1]^(1:(j + 1)) - z[2]^(1:(j + 1)))/(z[1] - z[2]))
## [1] 1.0000 0.7000 0.5900 0.4830 0.3971 0.3263
```

Processus AR(p)

Un modèle X_t est dit auto-regressive d'ordre p est noté par $X_t \sim AR(p)$ s'il admet l'écriture suivante :

$$X_t = \mu + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \epsilon_t, \text{ où } \epsilon_t \sim BB(0, \sigma^2) \quad (2.3.40)$$

Son polynôme caractéristique est défini par :

$$\Phi(L) = 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p$$

Un processus $AR(p)$ est stationnaire si et seulement si le polynôme caractéristique admet des racines en dehors du cercle unité en module (i.e. $\Phi(x) = 0 \implies |x_i| > 1$). On peut montrer que cette condition est équivalente à :

$$\begin{cases} \phi_1 + \phi_2 + \dots + \phi_p < 1 \\ \text{et } |\phi_p| < 1 \end{cases} \quad (2.3.41)$$

Lorsque le processus est stationnaire, il peut s'écrire sous la forme $MA(\infty)$. C'est-à-dire, il admet l'écriture suivante :

$$\tilde{X}_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \epsilon_{t-j} = \Psi(L) \epsilon_t \quad (2.3.42)$$

(Box et collab., 2008, Annexe A4.1) ont montrés que les coefficients ψ_j vérifient la relation suivante :

$$\psi_j = \phi_1\psi_{j-1} + \phi_2\psi_{j-2} + \dots + \phi_p\psi_{j-p} \quad \text{pour } j > 0 \quad (2.3.43)$$

avec $\psi_0 = 1$ et $\psi_j = 0$ pour $j < 0$.

Un processus $AR(p)$ possède les propriétés suivantes :

L'espérance :

$$\begin{aligned} E(X_t) &= \mu + \phi_1 E(X_{t-1}) + \phi_2 E(X_{t-2}) + \dots + \phi_p E(X_{t-p}) + E(\epsilon_t) \\ &= \mu + (\phi_1 + \phi_2 + \dots + \phi_p) E(X_t), \text{ car } E(X_t) = E(X_{t-h}) \text{ et } E(\epsilon_t) = 0 \quad (2.3.44) \\ E(X_t) &= \frac{\mu}{1 - \phi_1 - \phi_2 - \dots - \phi_p} = \frac{\mu}{\Phi(1)}. \end{aligned}$$

La variance :

$$\begin{aligned} \gamma(0) &= E(X_t - E(X_t))^2 = E(\tilde{X}_t^2) \text{ avec } \tilde{X}_t = X_t - E(X_t) \\ &= E[\tilde{X}_t(\phi_1\tilde{X}_{t-1} + \phi_2\tilde{X}_{t-2} + \dots + \phi_p\tilde{X}_{t-p} + \epsilon_t)] \\ &= \phi_1\gamma(1) + \phi_2\gamma(2) + \dots + \phi_p\gamma(p) + E(\tilde{X}_t\epsilon_t) \quad (2.3.45) \\ &= \phi_1\gamma(1) + \phi_2\gamma(2) + \dots + \phi_p\gamma(p) + \sigma^2 \end{aligned}$$

car $E(\tilde{X}_t\epsilon_t) = E((\phi_1\tilde{X}_{t-1} + \phi_2\tilde{X}_{t-2} + \dots + \phi_p\tilde{X}_{t-p} + \epsilon_t)\epsilon_t) = E(\epsilon_t^2) = \sigma^2$.

De même, on peut montrer que la fonction d'auto-covariance vérifie la relation suivante :

$$\gamma(k) = E[\tilde{X}_t\tilde{X}_{t-k}] = \phi_1\gamma(1) + \phi_2\gamma(2) + \dots + \phi_p\gamma(p) \text{ pour } k = 1, 2, \dots \quad (2.3.46)$$

La fonction d'auto-corrélation :

En divisant $\gamma(k)$ par $\gamma(0)$, on obtient la ACF $\rho(k)$. D'où on aura la relation suivante :

$$\rho(k) = \phi_1\rho(k-1) + \phi_2\rho(k-2) + \dots + \phi_p\rho(k-p) \quad (2.3.47)$$

Cette relation peut être écrite matriciellement :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \rho(1) \\ \rho(2) \\ \vdots \\ \rho(p) \end{pmatrix}}_{\rho} = \underbrace{\begin{pmatrix} \rho(0) & \rho(1) & \cdots & \rho(p-1) \\ \rho(1) & \rho(0) & \cdots & \rho(p-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho(p-1) & \rho(p-2) & \cdots & \rho(0) \end{pmatrix}}_{\Gamma} \underbrace{\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_p \end{pmatrix}}_{\phi} \quad (2.3.48)$$

La relation (2.3.48) est appelée **équations Yulle-Walker**.

Lorsque les valeurs du vecteur ϕ sont connues, ces équations seront utilisées afin de déterminer le vecteur ρ . On peut utiliser ces équations pour l'estimation des paramètres ϕ_i .

En effet,

$$\hat{\phi} = \hat{\Gamma}^{-1} \hat{\rho}$$

où $\hat{\Gamma}$ est la matrice des **corrélations empiriques**.

Exemple 2.6 : Estimation des paramètres à partir les équations Y-W

On considère un échantillon contenant 1000 observations d'une variable. L'estimation de la ACF de cette série est donnée dans le tableau suivant :

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$\hat{\rho}(k)$	1	0.2214	-0.695	-0.4115	0.4022	0.4677	-0.1597	-0.429

On sait que cette série suit un modèle $AR(3)$.

Donner une estimation des paramètres de ce modèle.

On a une estimation de la ACF d'un processus $AR(p)$ et on cherche à estimer les paramètres de ce processus. Pour ce faire, on fait recours aux équations de Yulle-Walker.

$$\hat{\rho}(1) = \hat{\phi}_1 \hat{\rho}(0) + \hat{\phi}_2 \hat{\rho}(1) + \hat{\phi}_3 \hat{\rho}(2)$$

$$\hat{\rho}(2) = \hat{\phi}_1 \hat{\rho}(1) + \hat{\phi}_2 \hat{\rho}(0) + \hat{\phi}_3 \hat{\rho}(1)$$

$$\hat{\rho}(3) = \hat{\phi}_1 \hat{\rho}(2) + \hat{\phi}_2 \hat{\rho}(1) + \hat{\phi}_3 \hat{\rho}(0)$$

Matriciellement, on a :

$$\begin{pmatrix} \hat{\rho}(1) \\ \hat{\rho}(2) \\ \hat{\rho}(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\rho}(0) & \hat{\rho}(1) & \hat{\rho}(2) \\ \hat{\rho}(1) & \hat{\rho}(0) & \hat{\rho}(1) \\ \hat{\rho}(2) & \hat{\rho}(1) & \hat{\rho}(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_2 \\ \hat{\phi}_3 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_2 \\ \hat{\phi}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\rho}(0) & \hat{\rho}(1) & \hat{\rho}(2) \\ \hat{\rho}(1) & \hat{\rho}(0) & \hat{\rho}(1) \\ \hat{\rho}(2) & \hat{\rho}(1) & \hat{\rho}(0) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \hat{\rho}(1) \\ \hat{\rho}(2) \\ \hat{\rho}(3) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_2 \\ \hat{\phi}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0.2214 & -0.6950 \\ 0.2214 & 1 & 0.2214 \\ -0.6950 & 0.2214 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0.2214 \\ -0.6950 \\ -0.4115 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.47 \\ -0.82 \\ 0.10 \end{pmatrix}$$

2.3.3 Processus ARMA

La combinaison des modèles AR et MA donne la classe des modèles ARMA (Auto-Regressive Moving Average). Ce type des modèle est défini comme suit :

Définition 2.5. Un processus X_t est dit un processus ARMA d'ordre p et q s'il admet l'écriture suivante :

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \phi_2 X_{t-2} - \dots - \phi_p X_{t-p} = \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \theta_2 \epsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \epsilon_{t-q} \tag{2.3.49}$$

où $\epsilon_t \sim BB(0, \sigma^2)$

On peut écrire ce processus comme suit : $\Phi(L)X_t = \Theta(L)\epsilon_t$ avec :

$$\Phi(L) = 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p \text{ et } \Theta(L) = 1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \dots + \theta_q L^q.$$

Stationnarité : Un processus $ARMA(p, q)$ est stationnaire si le polynôme $\Phi(L)$ admet des racines en dehors du cercle unité en module.

Causalité : Un processus $ARMA(p, q)$ est dit **causal** s'il existe des constantes ψ_j tels que $\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$ et

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \epsilon_{t-j}.$$

La condition de la causalité est équivalente à :

$$\Phi(x) = 1 - \phi_1 x - \phi_2 x^2 - \dots - \phi_p x^p = 0 \implies |x| > 1.$$

La détermination des coefficients ψ_j se fait par identification :

$$\Phi(L)X_t = \Theta(L)\epsilon_t \implies X_t = \frac{\Theta(L)}{\Phi(L)}\epsilon_t = \Psi(L)\epsilon_t.$$

Tel que : $\Phi(L)\Psi(L) = \Theta(L)$

$$\implies (1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p)(\psi_0 + \psi_1 L + \psi_2 L^2 + \dots + \psi_p L^p) = (1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \dots + \theta_p L^p).$$

En développant cette relation et par identification, on peut vérifier que les coefficients ψ_j se calculent comme suit :

$\psi_0 = 1$, $\psi_1 - \phi_1 \psi_0 = \theta_1$, $\psi_2 - \phi_1 \psi_1 - \phi_2 \psi_0 = \theta_2$ et d'une manière générale, on a :

$$\psi_j - \sum_{k=1}^p \phi_k \psi_{j-k} = \theta_j \text{ pour } j = 0, 1, 2, \dots \quad (2.3.50)$$

où $\theta_0 = 1$, $\theta_j = 0$ pour $j > q$ et $\psi_j = 0$ pour $j < 0$.

Inversibilité : Un processus $ARMA(p, q)$ est dit **inversible** si le polynôme $\Theta(L)$ admet des racines en dehors du cercle unité en module.

Lorsque le processus est inversible, il admet une représentation $AR(\infty)$. C'est-à-dire, il peut s'écrire sous la forme :

$$X_t = \Pi(L)X_t + \epsilon_t, \text{ avec } \Pi(L) = \Phi(L)^{-1}\Theta(L). \quad (2.3.51)$$

On peut montrer que les coefficients π_j peuvent être calculés de la manière suivante :

$$\pi_j + \sum_{k=1}^q \theta_k \pi_{j-k} = -\phi_j, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (2.3.52)$$

avec $\phi_0 = -1$, $\phi_j = 0$ pour $j > p$ et $\pi_j = 0$ pour $j < 0$.

Fonction d'auto-covariance : Dans ce paragraphe, on donne trois méthodes pour le calcul des auto-covariances.

Première méthode : Cette méthode est une application de la représentation $MA(\infty)$. En

effet, lorsque le processus est causal, il admet l'écriture :

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \epsilon_{t-j}. \quad (2.3.53)$$

D'où, $\gamma(k) = E(X_t X_{t-k}) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j+|k|}$.

Pour déterminer l'expression de la fonction de ψ_j , on peut écrire $\Psi(L)\Phi(L) = \Theta(L)$ et par identification on déduit :

$$\psi_j - \sum_{k=0}^j \phi_k \psi_{j-k} = \theta_j, \quad 0 \leq j < \max(p, q+1) \quad (2.3.54)$$

et

$$\psi_j - \sum_{k=0}^p \phi_k \psi_{j-k} = 0, \quad j \geq \max(p, q+1) \quad (2.3.55)$$

Ces équations peuvent être résolus successivement pour ψ_0, ψ_1, \dots

Alternativement, on détermine les p valeurs initiales de la fonction ψ_j , puis on cherche la solution générale de l'équation aux différences (2.3.55). (Pour les détails, voir la section B.1). La solution de l'équation aux différences (2.3.55) est :

$$\psi_n = \sum_{i=1}^k \sum_{j=0}^{m_i-1} c_{ij} n^j z_i^{-n}, \quad n \geq \max(p, q+1) - p \quad (2.3.56)$$

où $z_i, i = 1, 2, \dots, k$ sont les racines distinctes du polynôme caractéristique $\Phi(z)$ et m_i leurs ordres de multiplicité (on doit avoir $\sum_{i=1}^k m_i = p$).

Exemple 2.7 : Recherche de la fonction ACv d'un ARMA(2,1)

On considère le processus défini par : $(1 - L + \frac{1}{4}L^2)x_t = (1 + L)\epsilon_t$ avec ϵ_t un bruit blanc gaussien de moyenne nulle et de variance $\sigma^2 = 1$.

Déterminer la fonction d'auto-covariance de ce processus.

Cet exemple est pris de (Brockwell et Davis, 1991, p.92).

A partir de l'équation (2.3.50), on déduit les coefficients ψ_j :

$$\psi_0 = \theta_0 = 1$$

$$\psi_1 = \theta_1 + \psi_0 \phi_1 = \theta_1 + \phi_1 = 2$$

$$\psi_j - \psi_{j-1} + \frac{1}{4}\psi_{j-2} = 0 \text{ pour } j = 2, 3, \dots$$

La dernière relation est une équation aux différences linéaire homogène à coefficients constants. Le polynôme caractéristique associé à cette équation est $\Phi(z)$ qui admet une racine réelle double ($z_{1,2} = 2$). Donc

$$\psi_n = (c_{10} + c_{11}n)2^{-n}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Les constantes c_{10} et c_{11} sont déterminées à partir les valeurs initiales $\psi_0 = 1$ et $\psi_1 = 2$.

Soit $c_{10} = 1$, $c_{11} = 3$ et

$$\psi_n = (1 + 3n)2^{-n}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Finalement, on obtient pour $k \geq 0$:

$$\begin{aligned} \gamma(k) &= \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} (1+3j)(1+3j+3k)2^{-2j-k} \\ &= \sigma^2 2^{-k} \sum_{j=0}^{\infty} \left[(3k+1)4^{-j} + 3(3k+2)j4^{-j} + 9j^2 4^{-j} \right] \\ &= \sigma^2 2^{-k} \left[\frac{4}{3}(3k+1) + \frac{12}{9}(3k+2) + \frac{20}{3} \right] \\ &= \sigma^2 2^{-k} \left(\frac{32}{3} + 8k \right) \end{aligned}$$

Deuxième méthode : On peut aussi déterminer la fonction d'auto-covariance d'un processus ARMA d'une manière similaire à celle utilisée pour un processus AR. En multipliant les deux membres de l'équation (2.3.49) par X_{t-k} et en appliquant l'espérance, on obtient les équations aux différences linéaires :

$$\gamma(k) - \phi_1 \gamma(k-1) - \phi_2 \gamma(k-2) - \dots - \phi_p \gamma(k-p) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \theta_{j+k} \psi_j, \quad 0 \leq k < m, \quad (2.3.57)$$

et

$$\gamma(k) - \phi_1 \gamma(k-1) - \phi_2 \gamma(k-2) - \dots - \phi_p \gamma(k-p) = 0, \quad k \geq m. \quad (2.3.58)$$

avec $m = \max(p, q+1)$, $\psi_j = 0$ pour $j < 0$, $\theta_0 = 1$ et $\theta_j = 0$ pour $j \notin \{1, 2, \dots, q\}$.

La solution générale de l'équation aux différences (2.3.58) est :

$$\gamma(k) = \sum_{i=1}^h \sum_{j=0}^{m_i-1} c_{ij} k^j z_i^{-k}, \quad k \geq \max(p, q+1) - p \quad (2.3.59)$$

où les p constantes c_{ij} et $\gamma(k)$, $0 \leq k < \max(p, q+1) - p$ sont déterminées à partir des valeurs initiales après avoir calculé les ψ_j , $j = 0, 1, \dots, q$.

Exemple 2.8 :

Reprenant l'exemple précédent : $(1 - L + \frac{1}{4}L^2)x_t = (1 + L)\epsilon_t$

L'équation aux différences (2.3.58) devient :

$$\gamma(k) - \gamma(k-1) - \frac{1}{4}\gamma(k-2) = 0, \quad k \geq 2$$

qui admet comme solution générale :

$$\gamma(k) = (c_{10} + c_{11}k)2^{-k}, \quad k \geq 0. \quad (2.3.60)$$

Les valeurs initiales sont :

$$\begin{aligned}\gamma(0) - \gamma(1) - \frac{1}{4}\gamma(2) &= \sigma^2(\psi_0 + \psi_1) \\ \gamma(1) - \gamma(0) - \frac{1}{4}\gamma(1) &= \sigma^2\psi_0\end{aligned}$$

où $\psi_0 = 1$ et $\psi_1 = 2$. Or

$$\begin{cases} \gamma(0) = c_{10} \\ \gamma(1) = \frac{1}{2}(c_{10} + c_{11}) \\ \gamma(2) = \frac{1}{4}(c_{10} + c_{11}) \end{cases} \iff \begin{cases} 3c_{10} - 2c_{11} = 16\sigma^2 \\ -3c_{10} + 2c_{11} = 8\sigma^2 \end{cases} \iff \begin{cases} c_{10} = \frac{32}{3}\sigma^2 \\ 2c_{11} = 8\sigma^2 \end{cases}$$

Finalement, on aura :

$$\gamma(k) = \sigma^2 2^{-k} \left(\frac{32}{3} + 8k \right), \quad k \geq 0,$$

qui est la même expression trouvée précédemment.

```
gammak <- function(sigma2, k) {
  sigma2^2 * 2^(-(0:k)) * ((32/3) + 8 * (0:k))
}
gn <- gammak(1, 10)
plot((0:10), gn, type = "b", xlab = expression(k), ylab = expression(gamma(k)),
  pch = "*")
```

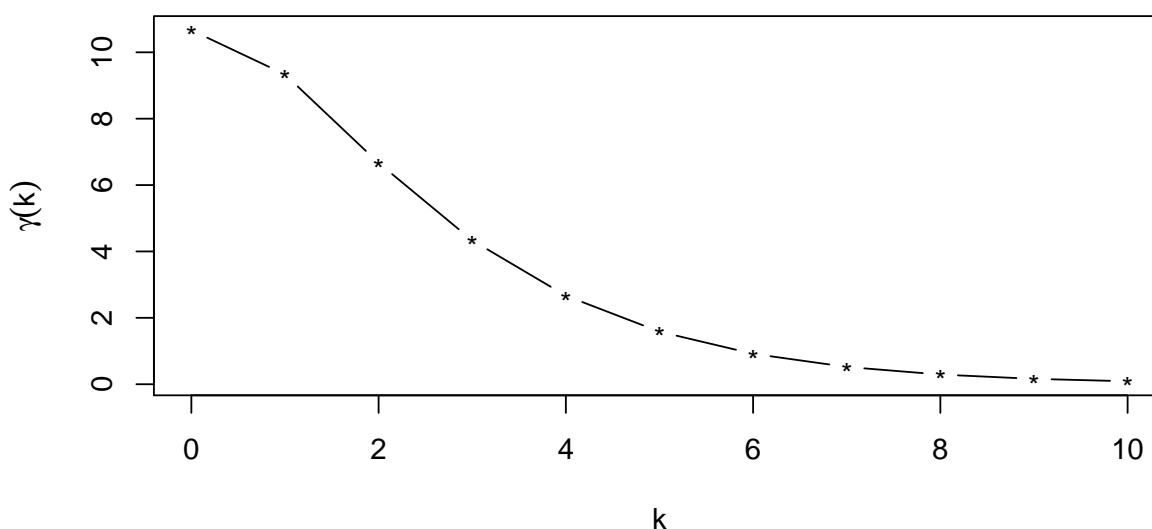


FIGURE 2.7 – Fonction d'auto-covariances

Troisième méthode : La détermination numérique de la fonction d'auto-covariance $\gamma(k)$ peut être effectuée facilement. En premier lieu, on calcule $\gamma(0), \gamma(1), \dots, \gamma(p)$ à partir les

équations (2.3.57) avec $k = 0, 1, \dots, p$, puis, en utilisant la relation de récurrence (2.3.58), on détermine $\gamma(p+1), \gamma(p+2), \dots$

Fonction d'auto-corrélation :

Une fois la fonction d'auto-covariance est calculée, on peut déduire la fonction d'auto-corrélation qui est définie par : $\rho(k) = \gamma(k)/\gamma(0)$.

Exemple 2.9 : Étude d'un processus ARMA(1,1)

Soit le processus X_t définit par :

$$X_t = 0.5X_{t-1} + \epsilon_t - 0.7\epsilon_{t-1}, \quad \text{où } \epsilon_t \sim BB(0, 1).$$

- 1) Ce processus est-il stationnaire ? Inversible ?
- 2) Écrire ce processus sous la forme MA(∞). Donner l'expression analytique de la fonction ψ_j .
- 3) En déduire l'expression de la fonction d'auto-corrélation.
- 4) Calculer les 3 premières auto-corrélations partielles.

1) Le processus peut être écrit comme suit : $\Phi(L)X_t = \Theta(L)\epsilon_t$ avec $\Phi(L) = 1 - 0.5L$ et $\Theta(L) = 1 - 0.7L$.

Il est stationnaire car $|\phi| = 0.5 < 1$. De même, ce processus est inversible car $|\theta| = 0.7 < 1$.

2) Le processus X_t est causal car $\Phi(L)$ admet une racine en dehors du cercle unité en module, donc il admet un écriture MA(∞), i.e :

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \epsilon_{t-j} = \Psi(L)\epsilon_t$$

où $\Phi(L)\Psi(L) = \Theta(L)$, c'est-à-dire :

$$(1 - \phi L)(\psi_0 + \psi_1 L + \psi_2 L^2 + \dots) = 1 + \theta L$$

$$\iff \psi_0 + (\psi_1 - \phi\psi_0)L + (\psi_2 - \phi\psi_1)L^2 + \dots = 1 + \theta L$$

Par identification, on obtient $\psi_0 = 1$, $\psi_1 = \theta + \phi\psi_0 = -0.7 + 0.5 = -0.2$ et pour tout $j > 1$:

$\psi_j - \phi\psi_{j-1} = 0 \iff \psi_j = 0.5\psi_{j-1} = 0.5^{j-1}\psi_1$. Soit :

$$\psi_j = \left(-\frac{1}{5}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^{j-1} \quad \text{pour } j = 1, 2, \dots$$

3) l'ACF est définie par : $\rho(k) = \gamma(k)/\gamma(0)$ avec :

$$\gamma(0) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 = 1 + \left(-\frac{1}{5}\right)^2 \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{j-1} = \frac{79}{75}.$$

et pour $k = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned}\gamma(k) &= \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j+k} = \sigma^2 \left(\psi_k + \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j \psi_{j+k} \right) \\ &= \sigma^2 \left[\left(-\frac{1}{5} \right) \left(\frac{1}{2} \right)^{k-1} + \frac{1}{25} \left(\frac{1}{2} \right)^{k-2} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4} \right)^j \right] = \sigma^2 \left(-\frac{13}{75} \right) \left(\frac{1}{2} \right)^{k-1}\end{aligned}$$

Ainsi

$$\rho(k) = \left(-\frac{13}{79} \right) \left(\frac{1}{2} \right)^{k-1} \quad \text{pour } k = 1, 2, \dots$$

```
rho.k <- function(k) (-13/79) * 0.5^(k - 1)
(rho.6 <- rho.k(1:6)) # 6 premières autocorrélations

## [1] -0.164557 -0.082278 -0.041139 -0.020570 -0.010285 -0.005142

ARMAacf(ar = 0.5, ma = -0.7, 6) # même résultat

##          0          1          2          3          4          5          6
## 1.000000 -0.164557 -0.082278 -0.041139 -0.020570 -0.010285 -0.005142
```

3) Les trois premières auto-corrélations partielles son données comme suit :

$$\phi_{11} = \rho(1) = -13/79 = -0.164557$$

$$\phi_{22} = \frac{\begin{vmatrix} \rho(0) & \rho(1) \\ \rho(1) & \rho(2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \rho(0) & \rho(1) \\ \rho(1) & \rho(0) \end{vmatrix}} = -0.1124$$

$$\phi_{33} = \frac{\begin{vmatrix} \rho(0) & \rho(1) & \rho(2) \\ \rho(1) & \rho(0) & \rho(3) \\ \rho(2) & \rho(1) & \rho(0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \rho(0) & \rho(1) & \rho(2) \\ \rho(1) & \rho(0) & \rho(1) \\ \rho(2) & \rho(1) & \rho(0) \end{vmatrix}} = -0.1124$$

```
ARMAacf(ar = 0.5, ma = -0.7, 3, pacf = T)

## [1] -0.16456 -0.11240 -0.07776
```

On finit ce chapitre par un tableau récapitulatif, qui résume les principales caractéristiques des différents processus linéaires.

	Processus AR(p)	Processus MA(q)	Processus ARMA(p, q)
Modèle en termes des retards de X_t	$\Phi(L)X_t = \epsilon_t$	$\Theta(L)^{-1}X_t = \epsilon_t$	$\Phi(L)\Theta(L)^{-1}X_t = \epsilon_t$
Modèle en termes des retards de ϵ_t	$X_t = \Phi(L)^{-1}\epsilon_t$	$X_t = \Theta(L)\epsilon_t$	$X_t = \Theta(L)\Phi(L)^{-1}\epsilon_t$
π_j (coefficients du AR(∞))	Série finie	Série infinie	Série infinie
ψ_j (coefficients du MA(∞))	Série infinie	Série finie	Série infinie
Condition de stationnarité	Racines de $\Phi(L) = 0$ sont en dehors du cercle unité en module	Toujours stationnaire	Racines de $\Phi(L) = 0$ sont en dehors du cercle unité en module
Condition d'inversibilité	Toujours inversible	Racines de $\Theta(L) = 0$ sont en dehors du cercle unité en module	Racines de $\Theta(L) = 0$ sont en dehors du cercle unité en module
ACF	Infinie (décroissance exponentielle et/ou décroissance sinusoidale)	q premières corrélations nulles. Toutes nulles après.	Infinie (décroissance exponentielle et/ou décroissance sinusoidale après $q - p$ retards).
PACF	p premières corrélations nulles. Toutes nulles après.	Infinie (décroissance exponentielle et/ou décroissance sinusoidale)	Infinie (décroissance exponentielle et/ou décroissance sinusoidale après $p - q$ retards).

TABLE 2.1 – Tableau récapitulatif des caractéristiques d'un processus ARMA

Exercices

Exercice 2.1

1) Déterminer lesquels des processus suivants sont stationnaires et lesquels sont inversibles (ϵ_t est un bruit blanc) :

a) $X_t = -0.2X_{t-1} + 0.48X_{t-2} + \epsilon_t$.

b) $X_t = -1.9X_{t-1} - 0.88X_{t-2} + \epsilon_t + 0.2\epsilon_{t-1} + 0.7\epsilon_{t-2}$.

c) $X_t + 0.6X_{t-1} = \epsilon_t + 1.2\epsilon_{t-1}$.

d) $X_t + 1.8X_{t-1} + 0.8X_{t-2} = \epsilon_t$.

e) $X_t + 1.6X_{t-1} = \epsilon_t - 0.4\epsilon_{t-1} + 0.04\epsilon_{t-2}$.

2) Dans les cas où le processus est stationnaire, calculer et représenter graphiquement la ACF et la PACF avec R.

Exercice 2.2

Soit le processus X_t défini par : $X_t = \epsilon_t + \theta\epsilon_{t-1}$ où ϵ_t est un bruit blanc. déterminer la valeur θ^* de θ qui maximise le coefficient $\rho(1)$.

Exercice 2.3

On considère le processus ARMA(1,1) défini par :

$$X_t = 0.9X_{t-1} + \epsilon_t + 0.5\epsilon_{t-1}, \text{ où } \epsilon_t \sim N(0, 1)$$

1) Ce processus est-il stationnaire ? Inversible ?

2) Donner la représentation MA(∞) de ce processus.

3) Montrer que sa fonction d'auto-corrélation simple est :

$$\rho(k) = \frac{203}{215} \left(\frac{9}{10} \right)^{k-1} \quad k = 1, 2, \dots$$

Exercice 2.4

Soit le processus AR(2) défini par :

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \epsilon_t, \text{ où } \epsilon_t \sim N(0, 1)$$

1) Rappeler les conditions sur les paramètres ϕ_1 et ϕ_2 pour que le processus soit stationnaire.

2) déterminer la représentation MA(∞) de ce processus. Exprimer les coefficients ψ_j en fonction de j lorsque $\phi_1 = 0.7$ et $\phi_2 = -0.1$.

3) En déduire que la ACF est :

$$\rho(k) = \frac{2^{4-k} - 5^{1-k}}{11} \quad k = 1, 2, \dots$$

Exercice 2.5

Soit ϵ_t un $BB(0, 1)$ et X_t un processus $ARMA$ vérifiant :

$$X_t - \frac{1}{3}X_{t-1} = \epsilon_t - \frac{1}{2}\epsilon_{t-1}$$

1) Soit Y un processus $AR(1)$ défini par : $Y_t - \frac{1}{3}Y_{t-1} = \epsilon_t$.

Montrer que $X_t = Y_t - \frac{1}{2}Y_{t-1}$.

2) Exprimer γ_0^X en fonction γ_0^Y et γ_1^Y .

3) Calculer γ_0^Y et γ_1^Y , puis déduire γ_0^X .

B.1 Équation aux différences

Dans cette section, on s'intéresse à la recherche de la solution générale d'une équation aux différences **linéaire homogène à coefficients constants** d'ordre k .

Définition 2.6. On appelle équation aux différences linéaire homogène à coefficients constants (EDLH) d'ordre k l'équation définie par :

$$x_t + \alpha_1 x_{t-1} + \alpha_2 x_{t-2} + \dots + \alpha_k x_{t-k} = 0 \text{ avec } \alpha_k \neq 0. \quad (\text{B.1.1})$$

Le polynôme caractéristique associé à cette équation est alors :

$$\alpha(L) = 1 + \alpha_1 L + \alpha_2 L^2 + \dots + \alpha_k L^k$$

D'après le théorème fondamental de l'algèbre, le polynôme caractéristique possède k solutions complexes. On note z_1, z_2, \dots, z_k ces solutions. On distingue deux cas :

Premier cas : des racines distinctes

Dans ce cas, la solution générale de l'équation (B.1.1) est de la forme (Neusser, 2012, pp : 34-36) :

$$\begin{aligned} x_t &= c_1 \lambda_1^t + c_2 \lambda_2^t + \dots + c_k \lambda_k^t \text{ où } \lambda_i = \frac{1}{z_i}. \\ &= c_1 z_1^{-t} + c_2 z_2^{-t} + \dots + c_k z_k^{-t} = \sum_{p=1}^k c_p z_p^{-t}. \end{aligned} \quad (\text{B.1.2})$$

Remarque 2.1. Dans le cas où les solutions sont des paires de nombres complexes conjugués, on fait recours aux coordonnées polaires de ces nombres pour écrire la solution comme un nombre réel.

Plus précisément, si (z_j, \bar{z}_j) est une paire des racines conjuguées du polynôme caractéristique avec $z_j = a_j + i b_j$, alors $z_j = r_j \exp(i \varphi_j)$ où $r_j = \sqrt{(a_j^2 + b_j^2)}$ et $\varphi_j = \arctan(b_j/a_j)$.

Remarque 2.2. Une fois, on a fixé k valeurs initiales, il existe une et une seule solution de l'équation (B.1.1).

Exemple 2.10 :

1) Soit l'équation aux différences suivantes :

$$\psi_{j-3} - 3\psi_{j-2} - 4\psi_{j-1} + 12\psi_j = 0$$

Donner la solution de cette équation lorsque $\psi_0 = 29/12$, $\psi_1 = 5/12$ et $\psi_2 = 1/2$.

2) Résoudre l'équation aux différences suivante :

$$h_{t-2} - h_{t-1} + h_t = 0, h_0 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \text{ et } h_1 = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}.$$

1) Le polynôme caractéristique associé à cette équation est :

$$P(z) = z^3 - 3z^2 - 4z + 12 = (z - 2)(z - 3)(z + 2).$$

D'où $P(z) = 0$ admet 3 racines réelles distinctes $z_1 = 2$, $z_2 = 3$ et $z_3 = -2$.

Donc, une solution de cette équation prend la forme :

$$\psi_j = c_1 z_1^{-j} + c_2 z_2^{-j} + c_3 z_3^{-j} = c_1 2^{-j} + c_2 3^{-j} + c_3 (-2)^{-j}$$

où les constantes c_i sont déterminées à partir des valeurs initiales. En effet :

$$\begin{cases} \psi_0 = 29/12 & \Rightarrow c_1 + c_2 + c_3 = 29/12 \\ \psi_1 = 5/12 & \Rightarrow 2c_1 + 3c_2 + 4c_3 = 5/12 \\ \psi_2 = 1/2 & \Rightarrow 4c_1 + 9c_2 + 16c_3 = 1/2 \end{cases}$$

$\Rightarrow c_1 = 1$, $c_2 = 3/4$ et $c_3 = 2/3$. Ainsi :

$$\boxed{\psi_j = 2^{-j} + \frac{3}{4} 3^{-j} + \frac{2}{3} (-2)^{-j}}$$

2) Le polynôme caractéristique associée à l'équation est $P(z) = z^2 - z + 1$ et possède deux racines complexes conjuguées : $z_k = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$, $k = 1, 2$.

Donc $z = r \exp(i\varphi)$ avec $r = \sqrt{(1^2 + 1^2)} = \sqrt{2}$ et $\varphi = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$. D'où, une solution de l'équation est de la forme : $h_t = c_1 r^{-1} \cos(\varphi t + c_2) = \frac{c_1}{\sqrt{2}} \cos(\frac{\pi}{4} t + c_2)$ où les constantes c_1 et c_2 sont déterminées à partir les valeurs initiales.

$$\begin{cases} h_0 = \frac{1}{2\sqrt{2}} & \Rightarrow \frac{c_1}{\sqrt{2}} \cos(c_2) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ h_1 = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} & \Rightarrow \frac{c_1}{\sqrt{2}} \cos(\frac{\pi}{4} + c_2) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \end{cases}$$

$\Rightarrow c_1 = 1$ et $c_2 = \frac{\pi}{3}$. Ainsi :

$$\boxed{h_t = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{\pi}{4} t + \frac{\pi}{3}\right), \text{ pour } t = 0, 1, \dots}$$

Deuxième cas : des racines multiples

Lorsque les racines de l'équation caractéristique ne sont pas distinctes, la situation devient un peu compliquée. On note les r racines distinctes par z_1, \dots, z_r , $r < k$ et leurs ordres de multiplicités par m_1, \dots, m_r . En écrivant l'équation aux différences en termes d'opérateur retard, on aura :

$$\left(1 + \alpha_1 L + \alpha_2 L^2 + \dots + \alpha_k L^k\right) x_t = (1 - \lambda_1)^{m_1} (1 - \lambda_2)^{m_2} \dots (1 - \lambda_r)^{m_r} x_t = 0$$

où λ_i , $1 \leq i \leq r$ sont égales à $1/z_i$.

Dans ce cas, la solution générale de l'équation aux différences est :

$$x_t = \sum_{i=1}^r (c_{i0} + c_{i1}t + c_{i2}t^2 + \dots + c_{im_i-1}t^{m_i-1}) \lambda_i^t$$

Exemple 2.11 :

Donner la solution de l'équation aux différences définie par :

$$(L - 2)^2(L + 3)X_t = 0 \text{ où } L \text{ est l'opérateur retard}$$

avec $X_0 = 2$, $X_1 = \frac{7}{6}$ et $X_2 = \frac{49}{36}$.

Le polynôme caractéristique associé à cette équation et $P(z) = (z - 2)^2(z + 3)$ qui admet une racine réelle double et une racine réelle simple. Soit $z_{1,2} = 2$ et $z_3 = -3$. D'où la solution générale de cette équation aux différences est :

$$X_t = (c_{10} + c_{11}t)z_{1,2}^{-t} + c_3z_3^{-t} = (c_{10} + c_{11}t)2^{-t} + c_3(-3)^{-t}$$

avec

$$\begin{cases} X_0 = 2 & \Rightarrow c_{10} + c_3 = 2 \\ X_1 = 7/6 & \Rightarrow (c_{10} + c_{11})/2 - c_3/3 = 7/6 \\ X_2 = 1/2 & \Rightarrow (c_{10} + 2c_{11})/4 + c_3/9 = 49/36 \end{cases}$$

$\Rightarrow c_{10} = 1$, $c_{11} = 2$ et $c_3 = 1$. Ainsi :

$$X_t = (1 + 2t)2^{-t} + (-3)^{-t} \text{ pour } t = 0, 1, \dots$$

En conclusion, et d'une manière plus générale (racines distinctes et/ou multiples), la solution générale de l'équation aux différences (B.1.1) est :

$$x_t = \sum_{i=1}^q \sum_{j=0}^{m_i-1} c_{ij}t^j z_i^{-t} \tag{B.1.3}$$

où $z_i, i = 1, 2, \dots, q$ sont les racines distinctes du polynôme caractéristique $\alpha(z)$ et m_i leurs ordres de multiplicité.