Université de Kairouan
Institut Supérieur des Mathématiques Appliquées & Informatique

Session Janvier 2015

Module	**Séries temporelles**
Auditoire	**2$^{\text{ième}}$ Année Mastère Ingénierie financière**
Enseignant	**Mohamed Essaied Hamrita**
Durée	**Deux heures**

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la clarté entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Aucun document n'est autorisé.

Exercice 1 : Soit le processus X_t définit par :

$$X_t - 0.4X_{t-1} - 0.45X_{t-2} = \epsilon_t + \epsilon_{t-1} + 0.25\epsilon_{t-2}, \qquad \epsilon_t \sim BB(0, 0.1)$$

1) Montrer que ce processus est sur-paramétré. En déduire que ce modèle peut-être réduit à un modèle $ARMA(1,1)$.

2) Ce dernier modèle est-il stationnaire ? Inversible ?

3) Montrer que le processus X_t admet une écriture $MA(\infty)$ et déterminer l'expression des ψ_j en fonction de j tels que $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j X_{t-j}$.

4) Montrer que la FAC théorique de ce modèle est :

$$\rho(k) = \frac{203}{215}\left(\frac{9}{10}\right)^{k-1}, \quad k \geq 1.$$

5) Déterminer les 3 premières auto-corrélations partielles.

6) L'erreur de prévision à l'horizon k est définit par : $e_t^k = X_{t+k} - E\left(\hat{X}_{t+k} \mid \mathscr{I}_{t-k}\right) = \sum_{j=0}^{k-1} \psi_j \epsilon_{t-j}$.
Déterminer la variance de cette erreur.

Exercice 2 :

Dans cet exercice, on désire modéliser le taux d'inflation en Tunisie observé depuis 1957 jusqu'à 2013 (source : BCT) en suivant la méthodologie de Box-Jenkins. La figure 1 donne l'évolution de la série brute (en haut) ainsi que la première différence de cette série (en bas). La figure 2, représente les auto-corrélations empiriques simples (à gauche) et partielles (à droite), les lignes horizontales représentent les bornes de l'intervalle de confiance des auto-corrélations..

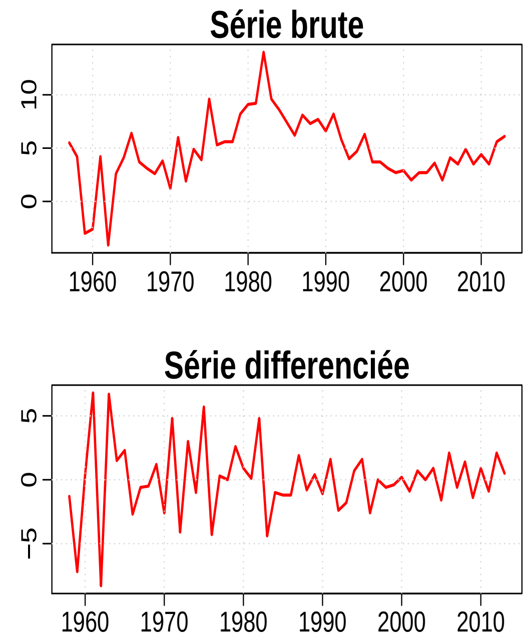

FIGURE 1 – L'évolution de la série brute et la série différenciée.

1) Interpréter la figure 1.

2) Énoncer les étapes de la méthodologie de Box-Jenkins.

3) En interprétant la figure 2, donner les différents modèles ARMA candidats qui peuvent modéliser la série en question.

4) En suivant la méthodologie de Box-Jenkins et en utilisant les sorties données ci-dessous, déterminer le modèle le plus approprié à cette série (Effectuer les tests nécessaires et chaque fois, énoncer les hypothèses et les statistiques des tests utilisés).

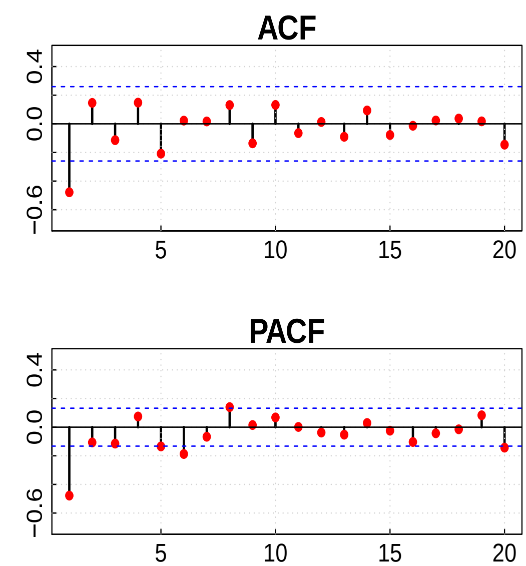

FIGURE 2 – L'évolution de la série brute et la série différenciée.

```
X.bar=0.01071429, n=57, sigma_X=2.82622

Modèle AR(1):

Coefficients:
          ar1
      -0.4719
s.e.   0.1160

sigma^2 estimated as 6.044:  log likelihood = -129.96,

aic = 263.92

####################################################

   Test de Box Pierce au seuil  5 %

####################################################

 BP( 4 )= 1.2682 ;  Chi2= 9.3484 ;  ddl= 3

####################################################

   Test de Ljung Box au seuil  5 %

####################################################

 LB( 4 )= 1.3609 ;   Chi2= 9.3484 ;  ddl= 3

####################################################

       Test de retournement au seuil de 5 %::

#####################################################

 T = 38  ;  mu_T = 36 ;  sigma_T = 3.10376 ;

 Z = 1.96  ;  p.value = 0.519

#####################################################

       Test de rang au seuil de 5 %:

#####################################################

 P = 835  ;  mu_P = 770  ;  sigma_P = 70.74602 ;

 Z = 1.96  ;  p.value = 0.358

#####################################

     Test de White au seuil 5 %

#####################################

 LM( 12 )= 41.35636  ;  chi2= 39.36408

#####################################

     Test ARCH d'Engel au seuil 5 %

#####################################

 LM( 12 )= 45  ;  chi2= 23.33666 R2= 1
####################################################
####################################################

Modèle MA(1):

Coefficients:
          ma1
      -0.5763
s.e.   0.1169

sigma^2 estimated as 5.832:

log likelihood = -129.04,  aic = 262.07

####################################################

   Test de Box Pierce au seuil  5 %

####################################################

 BP( 4 )= 1.1545 ;  Chi2= 9.3484 ;  ddl= 3

####################################################
```

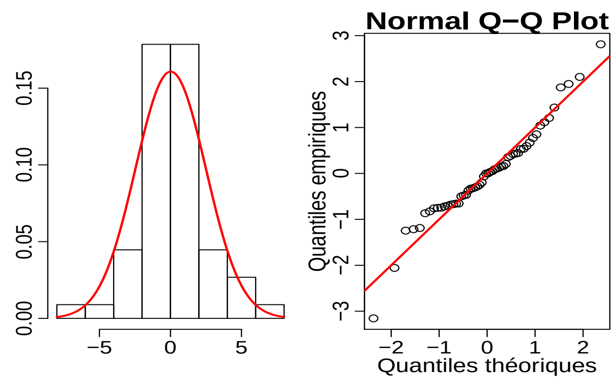

FIGURE 3 – AR(1)

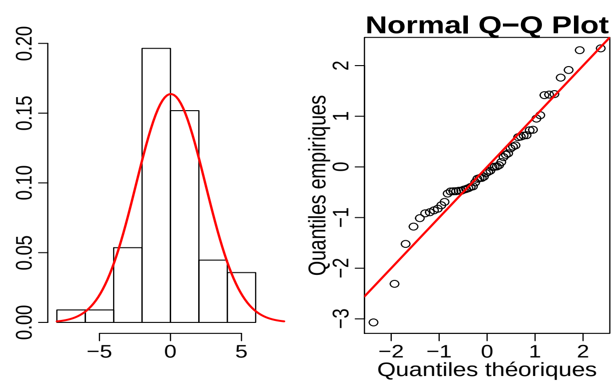

FIGURE 4 – MA(1)

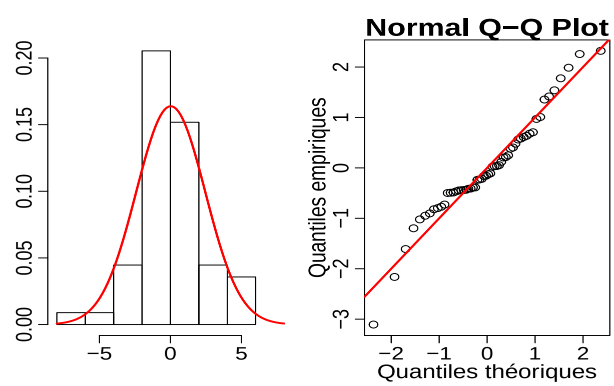

FIGURE 5 – ARMA(1,1)

```
###################################################
   Test de Ljung Box au seuil  5 %

###################################################

 LB( 4 )= 1.2473 ;   Chi2= 9.3484 ;  ddl= 3

###################################################

       Test de retournement au seuil de 5 %::

###################################################

 T = 40 ;  mu_T = 36 ;  sigma_T = 3.10376 ;

 Z = 1.96 ;  p.value = 0.197

###################################################

       Test de rang au seuil de 5 %:

###################################################

 P = 795 ;  mu_P = 770 ;  sigma_P = 70.74602 ;

 Z = 1.96 ;  p.value = 0.724

#####################################

     Test de White au seuil 5 %

#####################################

 LM( 12 )= 41.04354 ;  chi2= 39.36408

#####################################

     Test ARCH d'Engel au seuil 5 %

#####################################

 LM( 12 )= 45 ;  chi2= 23.33666 R2= 1
#################################################
#################################################


Modèle ARMA(1,1)

Coefficients:
          ar1      ma1
      -0.0858  -0.5089
s.e.   0.2854   0.2753

sigma^2 estimated as 5.823:

log likelihood = -128.99,  aic = 263.98

##################################################

   Test de Box Pierce au seuil  5 %

##################################################

 BP( 5 )= 3.1977 ;  Chi2= 9.3484 ;  ddl= 3

##################################################

   Test de Ljung Box au seuil  5 %

###################################################

 LB( 5 )= 3.5969 ;   Chi2= 9.3484 ;  ddl= 3

###################################################

       Test de retournement au seuil de 5 %::

###################################################

 T = 38 ;  mu_T = 36 ;  sigma_T = 3.10376 ;

 Z = 1.96 ;  p.value = 0.519

###################################################
       Test de rang au seuil de 5 %:

###################################################

 P = 806 ;  mu_P = 770 ;  sigma_P = 70.74602 ;

 Z = 1.96 ;  p.value = 0.611

#####################################

     Test de White au seuil 5 %

#####################################

 LM( 12 )= 40.94879 ;  chi2= 39.36408

#####################################

     Test ARCH d'Engel au seuil 5 %

#####################################

 LM( 12 )= 45 ;  chi2= 23.33666 R2= 1
```