Université de Kairouan
Institut Supèrieur des Mathématiques Appliquées & Informatique
Examen Février 2014

Module	Série temporelle
Auditoire	2ieme Année Mastère Ingénierie financière
Enseignant	Mohamed Essaied Hamrita
Durée	Deux heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la clarté entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Aucun document n'est autorisé.
L'examen comporte deux exercices indépendants répartis sur 03 pages.

Exercice 1 : (10 points)
Soit X_t un processus $AR(2)$ défini par :

$$X_t = -\frac{1}{4}X_{t-1} + \frac{3}{8}X_{t-2} + \epsilon_t \quad \text{où } \epsilon_t \sim BB(0,1)$$

1. Vérifier que le processus X_t est stationnaire (1 pt).
2. Montrer que le processus X_t admet une écriture $MA(\infty)$ et que : (2.25 pts)
$$\psi_j = \frac{2}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^j + \frac{3}{5}\left(-\frac{3}{4}\right)^j$$
3. Calculer $\gamma(0)$ et $\gamma(1)$. (2 pts)
4. Calculer $\rho(1)$ et montrer que : (2.75 pts)
$$\rho(k) = \frac{7}{25}\left(\frac{1}{2}\right)^k + \frac{18}{25}\left(-\frac{3}{4}\right)^k, \quad k \geq 0$$
Calculer $\rho(k)$, $k = 2, \ldots, 5$.
5. Calculer la fonction d'auto-corrélation partielle ϕ_{kk}, pour $k = 1, 2, \ldots, 5$.(1 pts).
6. Représenter graphiquement les fonctions d'autocorrélation simples et partielle. (1 pt).

Exercice 2 : (10 points)
Dans cet exercice on propose de modéliser une série temporelle comprenant les rendements des titres publics à court terme d'un pays européen pour les 21 ans allant du 1950 jusqu'à 1970. La figure 1 donne l'évolution de la série brute (en haut) ainsi que la première différence de cette série (en bas).

La figure 2, représente les auto-corrélations empiriques simples (à gauche) et partielles (à droite), les lignes horizontales représentent les bornes de l'intervalle de confiance des auto-corrélations.

1) Donner une interprétation à la figure 1.

2) En interprétant la figure 2, donner les différents modèles ARMA candidats qui peuvent modéliser la série.

3) Tester si le modèle à estimer est avec ou sans constante.

4) En suivant la méthodologie de Box-Jenkins et en utilisant les sorties données ci-dessous, déterminer le modèle le plus approprié à cette série (Effectuer les tests nécessaires et chaque fois, énoncer les hypothèses et les statistiques des tests utilisés).

```
Call: arima(x = x, order =c(0,1,1), include.mean = F)
Coefficients:
         ma1
      0.4350
s.e.  0.0652

sigma^2 estimated as 0.03576  log likelihood = 61.76,
aic = -119.52

##################################################
   Test de Box Pierce au seuil  5 %
##################################################

 BP( 4 )= 5.6246 ;  Chi2= 9.3484 ;  ddl= 3

##################################################
   Test de Ljung Box au seuil  5 %
###################################################

 LB( 4 )= 5.7379 ;   Chi2= 9.3484 ;  ddl= 3

###################################################
       Test de retournement au seuil de 5 %
###################################################

 T = 163  ; mu_T = 166 ; sigma_T = 6.65582; Z = 1.96;
 p.value = 0.652

###################################################
       Test de rang au seuil de 5 %:
###################################################

 P = 16013; mu_P = 15687.5; sigma_P = 664.72895;
 Z = 1.96 ;  p.value = 0.624
##################################################
```

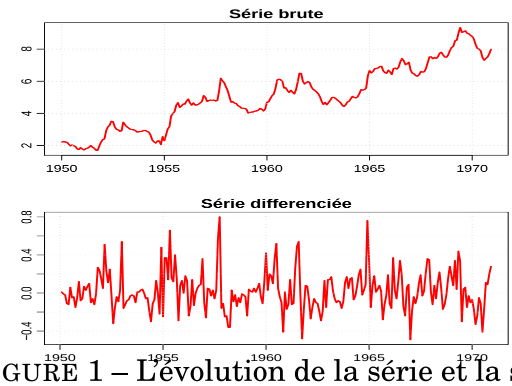


FIGURE 1 – L'évolution de la série et la série différenciée.

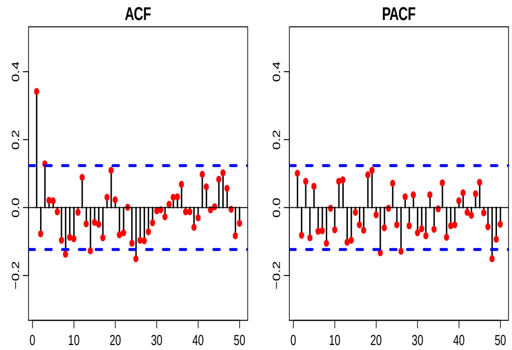
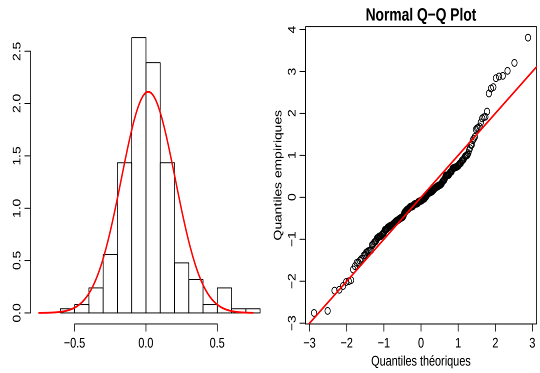


FIGURE 2 – Les auto-corrélations simples et partielles empiriques.




```
#####################################
    Test de White au seuil 5 %
#####################################

 LM( 12 )= 189.74292 ;   chi2= 39.36408

#####################################
    Test ARCH d'Engel au seuil 5 %
#####################################

 LM( 12 )= 240  ;   chi2= 23.33666 R2= 1

######################################
```

Bon Travail