Université de Kairouan

Institut Supèrieur des Mathématiques Appliquées & Informatique

Examen Janvier 2013

Module	Série temporelle
Auditoire	2ieme Année Mastère Ingénierie financière
Enseignant	Mohamed Essaied Hamrita
Durée	Deux heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la clarté entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Aucun document n'est autorisé.

Exercice 1:

Soit le processus X_t définie par: $X_t = -0.8\,X_{t-1} + 0.1\,X_{t-2} + \epsilon_t$ où $\epsilon_t \sim \mathrm{BB}(0,1)$.

1) Le processus X_t est-il stationnaire? Justifier.

2) Montrer que le processus X_t admet une écriture MA(∞) (i.e. $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j\,\epsilon_{t-j}$) et déterminer les 5 premiers termes de ψ_j.

3) Déterminer les 5 premieres autocorrélations et les 5 premières autocorrélations partielles. Représenter le corrélogramme des autocorrélations.

Exercice 2:

On suppose que le rendement journalier d'un cours boursier suit le model:

$$r_t = 0.01\,r_{t-1} + 0.1\,r_{t-2} + \epsilon_t\,;\, \epsilon_t \sim \mathrm{BB}(0, 0.02)$$

1) Quelle est la moyenne et la variance de la série des rendements r_t.

2) Déterminer les trois premieres autocorrélations.

3) On suppose que $r_{100} = -0.01$ et $r_{99} = 0.02$. Calculer la prévision des rendements aux instants $t = 101$ et $t = 102$.

4) Quelles sont les écart-types associés aux erreurs de prévisions.

Exercice 3:

Considérer le processus à moyenne mobile Z_t suivant : $Z_t = \epsilon_t + \theta\epsilon_{t-2}$ où $\epsilon_t \sim \mathrm{BB}(0,1)$.

1) A l'aide de la fonction `arima.sim` de `R`, écrire une ligne de commande pour simuler 300 observations du processus ci-dessus avec $\theta = 0.8$.

2) Ecrire des lignes commandes qui calculent et tracent les 30 premières autocorrélations et les 30 premières autocorrélations partielles.

Exercice 4:

On considère le processus ARMA(1,1):

$$X_t = \phi X_{t-1} + Z_t - \theta Z_{t-1}\,;\, Z_t \sim \mathrm{BB}(0, \sigma^2)$$

avec $|\phi| < 1$ et $|\theta| < 1$.

1) Ecrire le développement en moyenne infinie de ce processus.

2) Calculer $\gamma(0), \gamma(1)$ et $\gamma(2)$ à partir de l'expression précedente.

3) Montrer directement (sans utiliser la 1ere question) que la variance du processus est:

$$\gamma(0) = \sigma^2 \frac{1 + \theta^2 - 2\phi\theta}{1 - \phi^2}$$