Université de Kairouan
ISMAI
Enseignants : Med Essaied Hamrita - Abdelwaheb Ifa

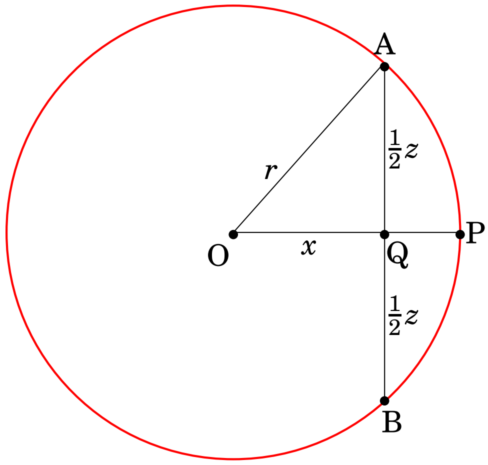
Année Universitaire 2014/2015
$2^{\text{ième}}$ année Licence MF

Probabilité & Statistique

TD5 : Variables aléatoires continues

Exercice 1

Dans la figure ci-contre, $0P$ est le rayon d'un cercle de centre O et de rayon r. Un point Q est choisi sur OP tel que tous les points sur OP ont la même chance d'être choisis. La droite passante par Q et perpendiculaire à OP coupe le cercle aux points A et B.
Déterminer la densité de probabilité de la distance AB, et montrer que la probabilité $P(AB > r) = 0.866$.



Exercice 2

Soit X une variable aléatoire continue et sa $d.d.p$ est donnée par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Déterminer $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 3

Soit X une $v.a$ qui possède comme fonction de probabilité, la fonction suivante :

$$f(x) = kx(2-x)\mathbb{1}_{]0,2[}$$

1) Déterminer la constante k.
2) Déterminer la fonction de répartition.
3) Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right)$.

Exercice 4

Soit la fonction F définie par :

$$F(x) = 2k - 2k\exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right)\mathbb{1}_{[0,+\infty[}, \ \lambda > 0.$$

1) Déterminer k pour que F soit la fonction de répartition de la variable aléatoire X.
2) Déterminer la $d.d.p$ de la $v.a$ X.

3) Calculer l'espérance et la variance de X. En déduire l'espérance et la variance de la $v.a$ $Y = -2X + 1/2$.

4) Trouver la fonction génératrice des moments de la $v.a$ X. Retrouver l'espérance et la variance de X.

5) On pose $Z = \dfrac{X}{\lambda}$. Montrer que la $v.a$ Z suit une loi usuelle que l'on déterminera.

Exercice 5

Soit X une $v.a$ de densité : $f(x) = \exp[-(x-\theta)]\mathbb{1}_{]\theta,+\infty[}$, $\theta \in \mathbb{R}$.

1) Déterminer la fonction de répartition et la médiane de cette loi.

2) Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des $v.a$ indépendantes et de même loi que X. On pose $Y = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$. Déterminer la $f.r$, puis la densité de la $v.a$ Y.

Exercice 6

La fonction de répartition de Cauchy est donnée par :

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{\arctan(x)}{\pi}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

1) Montrer qu'il s'agit bien d'une $f.r$.

2) Déterminer x tel que $P(X > x) = 0.1$.

Exercice 7

Des machines fabriquent des plaques de tôle destinées à être empilées.

1) Soit X la variable aléatoire "épaisseur de la plaque en mm" ; on suppose que X suit une loi normale de paramètres $m = 0.3$ et $\sigma = 0.1$.

Calculez la probabilité pour que X soit inférieur à 0.36mm et la probabilité pour que X soit compris entre 0.25 et 0.35mm.

2) L'utilisation de ces plaques consiste à en empiler n, numérotées de 1 à n en les prenant au hasard : soit X_i la variable aléatoire "épaisseur de la plaque numéro i en mm" et Z la variable aléatoire "épaisseur des n plaques en mm".

Pour $n = 20$, quelle est la loi de Z, son espérance et sa variance ?

Exercice 8

Soit X une variable aléatoire distribuée suivant une loi de Weibul de paramètres $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ de densité de probabilité :

$$f(x) = \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}\right]\mathbb{1}_{]0,+\infty[}$$

Soit $Y = (X/\alpha)^{\beta}$. Calculer la fonction de densité de Y. De quelle loi s'agit-il ?