Université de Kairouan
ISMAI
Enseignants : Med Essaied Hamrita - Abdelwaheb Ifa

Année Universitaire 2014/2015
$2^{\text{ième}}$ année Licence MF

Probabilité & Statistique

TD5 : Variables aléatoires discrètes

Exercice 1

On lance deux dés cubiques uniformes. On considère la variable aléatoire X désignant le nombre maximal des deux faces apparues.

1) Montrer que la loi de X est donnée par : $P(X = x) = \frac{2x-1}{36}, \quad x = 1, 2, \ldots, 6.$

2) On définit la variable aléatoire Y par le score maximal obtenu suite aux k lancers indépendantes d'un dé cubique uniforme. Déterminer l'expression de la densité de probabilité de la variable aléatoire Y.

3) Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 2

On lance deux dés équilibrés. On note S_1 et S_2 les variables aléatoires correspondant aux résultats obtenus.

1) Rappeler la loi de S_1, son espérance et sa variance.

2) On appelle $X = S_1 + S_2$ la somme et $Y = S_1 - S_2$ la différence des deux résultats. Calculer $E(X)$ et $E(Y)$. Montrer que $E(XY) = 0$.

Exercice 3

Soit X une variable aléatoire qui admet comme densité de probabilité, la fonction suivante :

$$f(x) = P(X = x) = \frac{2k}{3^x}, \quad x = 1, 2, \ldots, \infty.$$

1) Déterminer la constante k.

2) Calculer $P(X \text{ est pair})$.

Exercice 3

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre λ. Calculer $E\left(\frac{1}{X+1}\right)$.

Exercice 4

On donne trois urnes telles que : l'urne A contient 3 boules rouges et 5 boules noires, l'urne B contient 2 boules rouges et une boules noire et l'urne C contient 2 boules rouges et 3 boules noires. On prend une urne au hasard et l'on tire une boule de l'urne. Si la boule tirée est rouge, quelle est la probabilité pour qu'elle provienne de l'urne A ?

Exercice 5

Dans une population on sait que la probabilité de naissance d'un garçon est de 0.52 ; et par ailleurs que 2% des filles et 1% des garçons présentent une luxation congénitale de la hanche.

1) On note F l'évènement "naissance d'une file" et L l'évènement "avoir une luxation de la hanche". Dresser le tableau des probabilités des intersections entre F, $\overline{F}$ et L, $\overline{L}$. Les évènements F et L sont-ils indépendants ?

2) Calculer la probabilité qu'un nouveau-né présentant une luxation soit une fille.

Exercice 6

On considère deux urnes A et B telles que : l'urne A contient 3 boules rouges et 2 boules noires, l'urne B contient 2 boules rouges et 5 boules noires.

On choisit, au hasard, l'une des urnes ; on tire une boules de l'urne ett la remet dans l'autre urne ; on tire alors une boule de la seconde urne. Calculer la probabilité pour que les deux boules tirées soient de la même couleur.

Exercice 7

Une compagnie d'assurance répartit ses clients en trois classes R_1, R_2 et R_3 : les bons risques, les risques moyens et les mauvais risques. Les effectifs de ces trois classes représentent 20 % de la population totale pour la classe R_1, 50 % pour la classe R_2 et 30 % pour la classe R_3. Les statistiques indiquent que les probabilités d'avoir un accident au cours de l'année pour une personne de l'une de ces trois classes sont respectivement de 0.05, 0.15 et 0.3.

1) Quelle est la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la population ait un accident dans l'année ?

2) Si une personne X n'a pas un accident cette année, quelle est la probabilité qu'il soit un bon risque ?

Exercice 8

Une particule se trouve à l'instant 0 au point d'abscisse a (a entier), sur un segment gradué de 0 à N (on suppose donc $0 \le a \le N$). À chaque instant, elle fait un bond de $+1$ avec une probabilité p ($0 < p < 1/2$), ou un bond de -1 avec la probabilité $q = 1 - p$. Autrement dit, si x_n est l'abscisse de la particule à l'instant n, on a :

$$x_{n+1} = \begin{cases} x_n + 1 \text{ avec une probabilité } p \\ x_n - 1 \text{ avec une probabilité } 1 - p. \end{cases}$$

Le processus se termine lorsque la particule atteint une des extrémités du segment (i.e. s'il existe x_n avec $x_n = 0$ ou $x_n = N$).

1) On note u_a la probabilité pour que la particule partant de a, le processus s'arrête en 0.

(a) Que vaut u_0 ? u_N ?

(b) Montrer que si $0 < a < N$, alors $u_a = pu_{a+1} + qu_{a-1}$.

(c) En déduire l'expression exacte de u_a.

2) On note v_a la probabilité que la particule partant de a, le processus s'arrête en N. Reprendre les questions précédentes avec v_a au lieu de u_a.

3) Calculer $u_a + v_a$. Qu'en déduisez-vous ?

Exercice 9

1) Soient A, B, C trois évènements. Montrer que :

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$.

2) On dispose de 3 composantes électriques C_1, C_2 et C_3 dont la probabilité de fonctionnement est p_i et de fonctionnement totalement indépendant les uns des autres. Donner la probabilité

de fonctionnement du circuit

i) si les composantes sont disposées en série.

ii) si les composantes sont disposées en parallèle.

iii) si le circuit est mixte : C_1 est disposé en série avec le sous-circuit constitué de C_2 et C_3 en parallèle.

Exercice 10

Deux joueurs A et B misent sur les résultats successifs du jet répété d'une pièce. A chaque jet A reçoit une unité de la part de B si pile est sorti tandis qu'il paie une unité à B dans le cas contraire. Ils poursuivent le jeu tant qu'aucun des deux n'est ruiné. On suppose que les jets sont indépendants et que le côté pile de la pièce apparaît avec une probabilité p. Soient encore i et $N-i$ les fortunes initiales de A et B respectivement. Quelle est la probabilité que A gagne ?

Exercice 11

Les trois quarts des membres d'un club de sport sont des adultes, et un quart sont des enfants. Trois quarts des adultes, et trois cinquièmes des enfants, sont de sexe masculin. La moitié des hommes adultes, et un tiers des femmes adultes, utilisent la piscine au club ; la proportion correspondante pour les enfants des deux sexes est quatre cinquièmes.

1) Déterminer la probabilité pour qu'un membre du club utilise la piscine.

2) Déterminer la probabilité pour que la personne qui utilise la piscine est du sexe masculin.

3) Déterminer la probabilité pour qu'un membre du club soit du sexe féminin.

4) Déterminer la probabilité pour que le membre qui utilise la piscine soit un enfant.

5) Déterminer la probabilité pour que le membre du club qui n'utilise pas la piscine soit du sexe féminin ou un adulte.