Université de Kairouan
ISMAI
Enseignants : Med Essaied Hamrita - Abdelwaheb Ifa

Année Universitaire 2014/2015
$2^{\text{ième}}$ année Licence MF

Probabilité & Statistique

TD2 : Calcul des probabilités

Exercice 1

Soit $E = \{a, b, c\}$.

1) Déterminer la tribu engendrée par la partie $\{a, b\}$.

2) Soit $\Omega = E \cup \{d, e\}$. On considère les deux familles $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$ de parties de Ω ; $\mathscr{F}_1 = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c, d, e\}, \Omega\}$ et $\mathscr{F}_2 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{c, d, e\}, \{a, c, d, e\}, \{b, c, d, e\}, \Omega\}$.

a) Vérifier que $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$ sont des tribus.

b) Construire la tribu $\mathscr{F}_3$ engendrée par la classe formée par les deux sous ensembles $\{a\}$ et $\{c, d\}$.

c) Construire la tribu $\mathscr{F}_4$ engendrée par $\mathscr{F}_2 \cup \mathscr{F}_3$.

Exercice 2

Soit Ω un ensemble muni d'une tribu $\mathscr{F}$. Montrer que :

1) $\emptyset$ est un élément de $\mathscr{F}$, ($\emptyset \in \mathscr{F}$).

2) Si les $(A_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathscr{F}$, alors $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathscr{F}$.

Exercice 3

Soit une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$. Montrer que :

1) Si A_1, $A_2 \in \mathscr{A}$ et $A_1 \subseteq A_2$, alors $P(A_1) \leq P(A_2)$.

2) Si A_1, $A_2 \in \mathscr{A}$, alors $P(A_1 \cup A_2) + P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) + P(A_2)$.

3) Si $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une famille d'évènements, alors $P\left(\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}}\right) \leq \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} P(A_i)$.

Exercice 4

Parmi les fonctions suivantes, quelles sont celles qui définissent une probabilité sur l'ensemble $S = \{a_1, a_2, a_3\}$?

a) $P(a_1) = \frac{1}{4}$, $P(a_2) = \frac{1}{3}$, $P(a_3) = \frac{1}{2}$

b) $P(a_1) = \frac{1}{6}$, $P(a_2) = \frac{1}{3}$, $P(a_3) = \frac{1}{2}$

c) $P(a_1) = \frac{2}{3}$, $P(a_2) = -\frac{1}{3}$, $P(a_3) = \frac{2}{3}$

d) $P(a_1) = 0$, $P(a_2) = \frac{1}{3}$, $P(a_3) = \frac{2}{3}$.

Exercice 5

1) On permute les lettres du mot LOUCHE. Déterminer la probabilité des évènements suivants : A :"Obtenir le mot CHELOU", B :"Le mot commence par L".

2) On permute les lettres du mot BABAR. Déterminer la probabilité des évènements suivants : C :"Obtenir le même mot", D :"Les A se suivent".

Exercice 6

On pipe un dé de telle sorte que la probabilité du résultat obtenu quand on jette le dé soit proportionnelle au résultat (par exemple, 6 a une probablité deux fois plus grande que 3). Soit

A=nombre pair, B=nombre premier, C=nombre impair.
1) Donner la probabilité de chaque résultat possible.
2) Calculer $P(A)$, $P(B)$, et $P(C)$.
3) Calculer la probabilité pour que : (i) on obtienne un nombre pair ou un nombre premier. (ii) on obtienne un nombre premier impair. (iii) A mais non B se réalise.

Exercice 7

Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10. On tire successivement et avec remise 3 boules de cette urne. Calculer la probabilité d'obtenir :
1) trois numéros identiques,
2) trois numéros deux à deux distincts,
3) trois numéros consécutifs dans l'ordre où ils ont été obtenus,
4) trois numéros rangés par ordre strictement croissant.

Exercice 8

On lance simultanément cinq dés équilibrés à 6 faces. Calculer la probabilité d'obtenir :
1) un double : deux dés amènent la même face, et les trois autres amènent des faces différentes entre elles et de celle du double,
2) deux doubles : deux dés amènent la même face, deux autres amènent une même autre face, et le dernier amène une face différente,
3) un triple : trois dés amènent la même face, et les deux autres amènent des faces différentes entre elles et de celle du triple,
4) un double et un triple,
5) un quintuplet : les cinq dés amènent la même face,
6) un "dépareillé" : les cinq dés amènent des faces toutes différentes.

Exercice 9

En ignorant les jours bissextiles, les jours de l'année peuvent être numérotés de 1 à 365. Supposons que les anniversaires sont tous aussi susceptibles de tomber sur n'importe quel jour de l'année. Considérons un groupe de n personnes, dont vous n'êtes pas un membre. Un élément de l'ensemble fondamental Ω sera une séquence de n anniversaires (une pour chaque personne).
1) Définir la fonction de probabilité P pour Ω.
2) Considérons les évènements suivants :
A : Une personne parmi le groupe partage avec vous l'anniversaire.
B : Deux personnes du groupe ont la même date de naissance.
C : Trois personnes du groupe ont la même date de naissance.
Décrire les sous-ensembles de Ω pour chaque évènement.
3) Déterminer une formule exacte pour $P(A)$. Quelle est la plus petite valeur de n telle que $P(A) > 0.5$?

Exercice 10

1) On lance 2 dés équiprobables à 6 faces. Déterminer la probabilité de l'évènement A : la somme des chiffres soit supérieure ou égale à 10.
2) On considère l'univers $\Omega = \{(i,j), 0 \leq i,j \leq 4\}$. Les évènements élémentaires de la forme $(2p+1;2q+1)$ ont la même probabilité α et les autres évènements élémentaires ont la même

probabilité $\alpha/3$. Calculer α puis la probabilité de l'évènement $\{i > j\}$.

Exercice 11

On lance une pièce équilibrée un nombre indéterminé de fois.

1) Calculer la probabilité d'obtenir le premier PILE avant le 4ième lancer.

2) Calculer la probabilité d'attendre au moins 4 lancers avant le premier PILE.

3) Calculer la probabilité d'obtenir le premier PILE à un rang impair.

4) Calculer la probabilité d'obtenir le deuxième FACE avant le 5ième lancer.

5) Calculer la probabilité d'obtenir le deuxième FACE à un rang impair.

NB : on admettra que $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ si $0 < x < 1$.

Exercice 12

On considère une urne qui contient deux boules vertes et une boule rouge dans laquelle on effectue une infinité de tirages successifs et avec remise.

On définit E l'événement : « on obtient au moins une boule rouge ». On souhaite calculer $P(E)$ par trois méthodes différentes. Pour cela, on note pour tout n de $\mathbb{N}^*$ les événements suivants :

A_n : « on obtient la première boule rouge au n-ième tirage »,

B_n : « on obtient au moins une boule rouge au cours des n premiers tirages »,

C_n : « on obtient n boules vertes au cours des n premiers tirages ».

1) Calculer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $P(A_n)$, $P(C_n)$ et $P(B_n)$.

2) Exprimer E à l'aide des événements A_n, pour $n \in \mathbb{N}^*$, et en déduire $P(E)$.

3) Exprimer E à l'aide des événements B_n, $n \in \mathbb{N}^*$, et en retrouver $P(E)$.

4) Exprimer $\bar{E}$ à l'aide des événements C_n, $n \in \mathbb{N}^*$, et en déduire $P(\bar{E})$ puis $P(E)$.

5) Que dire de l'événement E ? Interpréter ce résultat.

Exercice 13

Trois personnes A, B, C lancent une pièce équiprobable à tour de rôle. La première qui obtient PILE a gagné. On suppose que A commence, suivi par B puis C. Calculer la probabilité de gagner pour chacun des joueurs.