

## Probabilité & Statistique

### TD1 : Analyse combinatoire

#### Exercice 1

1) Soient  $A$  et  $B$  deux sous-ensembles d'un ensemble  $E$ . Montrer que  $A \Delta B = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$ . (On note que  $\Delta$  représente l'opérateur différence symétrique).

2) Soit  $A, B$  et  $C$  trois événements quelconques liés à une même épreuve aléatoire.

Décomposer les événements  $E = (A \cup B) \Delta C$  et  $F = A \cup (B \Delta C)$  en une réunion d'événements incompatibles deux à deux et indécomposables, appelés atomes. Dans quel cas les événements  $E$  et  $F$  sont-ils confondus ?

#### Exercice 2

Supposons une famille contient deux enfants d'âges différents, et nous sommes intéressés par le sexe de ces enfants. Soit  $F$  qu'un enfant est de sexe féminin et  $M$  que l'enfant est de sexe masculin et soit  $FM$  un couple qui indique que l'enfant le plus âgé est une fille et le moins âgé est un garçon. Il y a quatre points dans l'ensemble  $E$  des observations possibles :

$$E = \{FF, FM, MF, MM\}.$$

Soit  $A$  l'ensemble des possibilités de ne pas contenir des garçons ;  $B$ , l'ensemble qui contient deux garçons ; et  $C$ , contient au moins un garçon. Donner les éléments des ensembles  $A, B, C, A \cap B, A \cup B, A \cap C, A \cup C, B \cap C, B \cup C$  et  $C \cap \bar{B}$ .

#### Exercice 3

En supposant qu'il n'y a pas de répétition :

- 1) Combien de nombres de 3 chiffres peut-on former à l'aide des six chiffres 2, 3, 5, 6, 7 et 8 ?
- 2) Combien de ces nombres sont inférieur à 400 ?
- 3) Combien sont pairs ?
- 4) Combien sont des multiples de 5 ?

#### Exercice 4

De combien de façons différentes peut-on répartir un groupe de 7 personnes :

- 1) sur une rangée de 7 chaises ?
- 2) autour d'une table ?

#### Exercice 5

- 1) De combien de façons différentes, 3 garçons et 2 filles peuvent-ils prendre place sur un banc ?

- 2) De combien de façons peuvent-ils s'asseoir si les garçons s'assoient les uns à côté des autres et s'il en est de même pour les filles ?
- 3) De combien de manières différentes peuvent-ils s'asseoir si seulement les filles s'assoient l'une à côté de l'autre ?

---

### Exercice 6

---

Combien de permutations distinctes peut-on former avec toutes les lettres des mots : (i) leur, (ii) anabase, (iii) sociologique ?

---

### Exercice 7

---

Déterminer le nombre des possibilités pour former un mot de passe formé de 10 lettres sous les restrictions suivantes : (on note qu'il y a 26 lettres dans l'alphabet)

- 1) Toutes les lettres sont minuscules.
- 2) Toutes les lettres sont minuscules et distinctes.
- 3) Les lettres et les nombres doivent alterner et distincts (exemple : "1w2x9c4u5s"). (On note que les nombres sont 0,1,..., 9.)
- 4) Toutes les lettres sont minuscules, distinctes et ordonnées alphabétiquement. ("abfghikmno" est candidat, mais non pour "bafghikmno").
- 5) Le mot ne peut contenir que les lettres A et B comme des lettres majuscules.
- 6) Le mot ne peut contenir que les lettres A et B comme des lettres majuscules, et doit contenir chacune de ces lettres.
- 7) Le mot ne peut contenir que les lettres A et B comme des lettres majuscules, et chacune de ces deux lettres apparaît d'un nombre égal.

---

### Exercice 8

---

- 1) Soient les ensembles  $A$  et  $B$  définis par :  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $B = \{A, B, \dots, Z\}$ .
  - a) Dénumérer le nombre d'applications  $f : A \rightarrow B$ .
  - b) Idem sachant que  $f(3) = W$ .
  - c) Idem sachant que  $W$  admet un seul antécédent.
- 2) Soit l'ensemble  $E = \{P, F\}$ .
  - a) Dénumérer le nombre de suites avec répétition de 4 éléments pris dans  $E$ .
  - b) Idem sachant que  $P$  apparaît une seule fois.

---

### Exercice 9

---

Soient les ensembles  $A$  et  $B$  définis par :  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ .

- a) Déterminer le nombre d'applications injectives  $f : A \rightarrow B$ .
  - b) Idem sachant que 4 admet un seul antécédent.
- 2) Soit  $E = \{A, B, \dots, Z\}$ .
    - a) Déterminer le nombre de suites sans répétition possibles de 5 éléments pris dans  $E$ .
    - b) Idem sachant que  $W$  apparaît en troisième position.

---

### Exercice 10

---

- 1) De combien de manières peut-on former un jury de 3 hommes et 2 femmes parmi 7 hommes et 5 femmes ?
- 2) Une délégation de 4 étudiants est choisie chaque année pour suivre le congrès annuel de l'association des Parents d'Étudiants.

- a) De combien de manières peut-on former la délégation s'il y a 12 étudiants éligibles?
- b) De combien de manières, si deux des étudiants éligibles refusent de suivre le congrès ensemble?
- c) De combien de manières, si deux des étudiants éligibles sont des jumeaux et ne pourront suivre le congrès qu'ensemble?

---

### Exercice 11

---

1) Démontrer que, pour tous entiers naturels  $n$  et  $k$  tels que  $1 \leq k < n$ , on a :  $C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = C_n^k$ .

2) En déduire que, pour tous entiers naturels  $n$  et  $k$  tels que  $2 \leq k < n - 1$ , on a :

$$C_{n-2}^{k-2} + 2C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^k = C_n^k.$$

3) Montrer que :  $2^n = \sum_{p=0}^n C_n^p$ .

4) Montrer que :  $\sum_{p=0}^n (-1)^p C_n^p = 0$ .