Université de Kairouan
Institut Supèrieur des Mathématiques Appliquées & Informatique

Session Janvier 2017

Module	**Statistiques paramétriques & non paramétriques**
Auditoire	**$1^{\text{iére}}$ Année Mastère Ingénierie financière**
Enseignant	**Mohamed Essaied Hamrita**
Durée	**Deux heures**

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la clarté entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Aucun document n'est autorisé.

Exercice 1 : Soit $(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ un $n-$échantillon de variables aléatoires iid issu de la loi de X de densité de probabilité :

$$f(x,\theta) = p[X=x] = \frac{1}{\theta}\left(1-\frac{1}{\theta}\right)^{x-1}, \qquad \theta > 1;\; x = 1,2,\ldots,n.$$

1) Reconnaître la loi de X. En déduire $E(X)$ et $V(X)$.

2) Construire un estimateur pour θ par la méthode des moments. Il sera noté $\widehat{\theta}_1$.

3) Déterminer l'estimateur de θ par la méthode du maximum de vraisemblance. Il sera noté $\widehat{\theta}_2$.

4) Étudier les qualités de $\widehat{\theta}_2$ (biais, convergence et efficacité).

Exercice 2 :

On procède à une série de mesures avec un même appareil. Le résultat d'une mesure est supposé une variable aléatoire normale ($X_i \sim N(m,\sigma^2)$). On a observé les mesures suivantes :

15.2 15.8 14.7 15.3 15.9 15.1 15.6 14.9 14.9

I) On suppose que σ^2 est connu et prend la valeur 0.25.

1) Construire un intervalle de confiance de niveau 90% pour le paramètre m. Il sera noté I_1

2) Construire un intervalle de confiance de niveau 95% pour le paramètre m. Il sera noté I_2.

3) Déterminer la taille d'échantillon n qui donne un intervalle de confiance de même longueur que I_1 et de même niveau que I_2.

II) On suppose que σ^2 est inconnu.

1) Construire un intervalle de confiance de niveau 95% pour le paramètre m.

2) Construire un intervalle de confiance de niveau 95% pour le paramètre σ^2.

Exercice 3 :

Soit un échantillon de 16 colis prélevé d'un ensemble reçus par une grande surface. La variable poids notée X est supposée distribuée selon une loi normale de moyenne m et de variance $\sigma^2 =$ 156.25. On propose tester l'hypothèse $H_0 : m = 250$ vs $H_1 : m = 260$ avec un risque α=5%.

1) Déterminer la région critique du test le plus puissant au sens de Neymann-Pearson.

2) Quelle est la décision à prendre si les mesures effectuées donnent : $\sum X_i = 4203.2$ kg ?

3) Calculer la puissance du test.

4) Comment varie la puissance du test lorsque :

i) n augmente, pour α fixé (α=5%).

ii) α diminue, pour n fixé ($n = 16$).

5) Montrer que la puissance du test diminue lorsque σ^2 augmente pour n et α fixés.

Bon Travail