Université de Kairouan
Institut Supérieur des Mathématiques Appliquées & Informatique

Session Janvier 2015

Module	**Statistiques paramétriques & non paramétriques**
Auditoire	**1$^{\text{ière}}$ Année Mastère Ingénierie financière**
Enseignant	**Mohamed Essaied Hamrita**
Durée	**Deux heures**

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la clarté entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Aucun document n'est autorisé.

Exercice 1 : Soit $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un $n-$échantillon de variables aléatoires iid issu de la loi de densité de probabilité :

$$f(x,\theta) = \begin{cases} \dfrac{3x^2}{\theta}\exp(-\dfrac{x^3}{\theta}) & \text{si } x > 0,\ \theta > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1) On considère la $v.a$ $Y = \dfrac{X^3}{\theta}$. Déterminer la densité de Y. Montrer que Y suit une loi usuelle et en déduire $E(X^3)$ et $V(X^3)$.

2) Déterminer par la méthode du maximum de vraisemblance un estimateur $\hat{\theta}$ de θ. Est-il sans biais ? Convergent ?

Exercice 2 : Le nombre de voitures qui arrivent à un poste de péage est supposé suit une loi de Poisson de paramètre λ. Un échantillon de 500 observations a donné le résultat suivant :

Nombre de voitures	0	1	2	3	4	5
Effectifs	52	151	130	102	45	20

1) Estimer λ par la méthode des moments.

2) Tester l'ajustement des observations utilisant l'estimation de λ à une distribution de Poisson.

On rappelle que la densité de la loi de Poisson est :

$$p(x,\lambda) = Pr(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!},\ x = 0, 1, \ldots$$

Exercice 3 : Les parties A et B sont indépendantes.

Le tableau suivant présente un extrait des valeurs boursière de la bourse de New York, avant (X) et après (Y) le 11/09/2001. Les valeurs concernant 9 actions choisies au hasard parmi les 38 actions qui pourraient constituer un portefeuille :

Actions	**Avant (X)**	**Après (Y)**
American Airlines	216	180
Alcatel	144	144
General Motors	107	117
IBM	108.3	108.5
General Electric	592.5	595
Sony	189.9	190
Mc Donald	38.5	35.5
Pizza Hut	155	151.1
Phenix	163.1	165.4

Partie A : Dans cette partie, on suppose que $X \sim N(m_X, \sigma_X^2)$ et $Y \sim N(m_Y, \sigma_Y^2)$.

1) On veut tester $H_0 : m_X = 190$ vs $H_1 : m_X = 195$.

a) Déterminer la région critique au sens de Neyman-Pearson correspondant au seuil de signification $\alpha = 5\%$.

b) Quelle est la décision à prendre ?

c) Calculer β le risque de deuxième espèce. En déduire la puissance du test.

2) a) Déterminer un intervalle de confiance pour un niveau de signification 95% de $m_X - m_Y$.

b) Peut-on admettre, au seuil $\alpha = 5\%$, que le cours moyen des actions n'est pas affecté par l'opération terroriste du 11/09/2001 ?

Partie B : Dans cette partie, on suppose que les lois des deux variables aléatoires, X et Y, sont inconnues. On veut tester $H_0 : m_X = m_Y$ vs $H_1 : m_X = m_Y$.

1) Quel test peut-on appliquer dans ce cas ? Justifier.

2) Appliquer le test proposé et donner la décision au seuil $\alpha = 5\%$.

Bon Travail