Simulation & Modélisation

Chapitre 3: Simulation des Processus Stochastiques

Mohamed Essaied Hamrita

Institut Supèrieur de Mathématiques Appliqués & Informatique - Kairouan

Novembre 2013

M2: Ingénierie Financière

Plan du chapitre

Introduction

Mouvement Brownien standard

MBS multidimensionnel

Mouvement Brownien Arithmétique

Movement Brownien Géométrique

Equations Différentielles Stochastiques

Introduction

- La simulation est un outil de financce computationnelle. Elle est utilisée comme méthode de calcul de prix d'options et comme instrument de gestion de risque.

Introduction

- La simulation est un outil de financce computationnelle. Elle est utilisée comme méthode de calcul de prix d'options et comme instrument de gestion de risque.
- La méthode de MC, comme méthode de simulation, est caractérisée par sa grande souplesse et par sa capacité de traiter un problème en termes de dimensions.

Introduction

- La simulation est un outil de financce computationnelle. Elle est utilisée comme méthode de calcul de prix d'options et comme instrument de gestion de risque.
- La méthode de MC, comme méthode de simulation, est caractérisée par sa grande souplesse et par sa capacité de traiter un problème en termes de dimensions.
- On s'intéresse, donc, aux méthodes de simulation d'une diffusion de la forme :

$$dS_t = \mu(S_t)dt + \sigma(S_t)dW_t, \quad S_0 \in \mathbb{R}^d.$$

Ici, S_t modèlise l'évolution de $d-$ sous-jacents sur un marché et W est mouvement brownien standard $d-$dimensionnel.

Mouvement Brownien standard

Définition

Un processus stochastique $W : [0, +\infty[\times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est un MBS si :

- $W_0 = 0$.

Mouvement Brownien standard

Définition

Un processus stochastique $W : [0, +\infty[\times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est un MBS si :

- $W_0 = 0$.
- Pour tous $s \leq t$, $W_t - W_{t-1}$ suit une loi $N(0, t-s)$.

Mouvement Brownien standard

Définition

Un processus stochastique $W : [0, +\infty[\times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est un MBS si :

- $W_0 = 0$.
- Pour tous $s \leq t$, $W_t - W_{t-1}$ suit une loi $N(0, t - s)$.
- Pour tout $n \geq 1$, et tout $t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_n$, les accroissements $(W_{t_i+1} - W_{t_i} \,:\, 0 \leq i \leq n-1)$ sont **indépendants**.

Mouvement Brownien standard

Définition

Un processus stochastique $W : [0, +\infty[\times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est un MBS si :

- $W_0 = 0$.
- Pour tous $s \leq t$, $W_t - W_{t-1}$ suit une loi $N(0, t-s)$.
- Pour tout $n \geq 1$, et tout $t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_n$, les accroissements $(W_{t_i+1} - W_{t_i} \, : \, 0 \leq i \leq n-1)$ sont **indépendants**.

Mouvement Brownien standard

Définition

Un processus stochastique $W : [0, +\infty[\times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est un MBS si :

- $W_0 = 0$.
- Pour tous $s \leq t$, $W_t - W_{t-1}$ suit une loi $N(0, t-s)$.
- Pour tout $n \geq 1$, et tout $t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_n$, les accroissements $(W_{t_i+1} - W_{t_i} : 0 \leq i \leq n-1)$ sont **indépendants**.

En d'autres termes, pour tout $t0$, $W_t \sim N(0, t)$.
Les trajectoires de $(w_t,\ t0)$ sont presque sûrement continues.

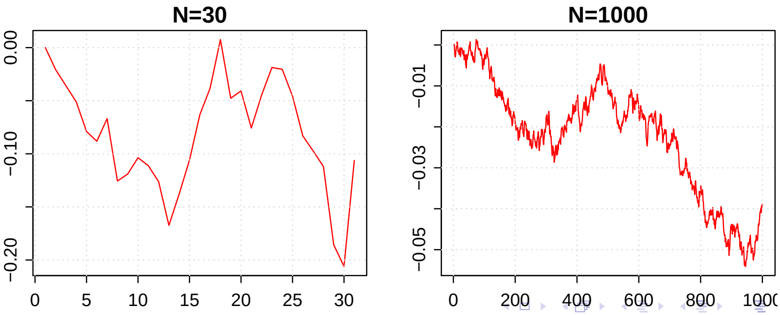
Pour simuler le mouvement brownien qui est un processus à temps continu, il faut d'abord discrétiser le temps. Soit Δt la longueur d'une pèriode de temps. Nous simulerons le mouvement brownien au temps $0, \Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \ldots$

Ce schéma de simulation est appelé schéma d'Euler aléatoire.

Algorithme :

```
delta= sqrt(T/n)
w[0] = 0
pour i = 1 à n Faire
W[i] = W[i-1] + delta * rnorm(1)
```

```
T <- 1
n1 <- 30
n2 <- 1000
delta1 <- T/n1
delta2 <- T/n2
x1 <- numeric(n1)
x2 <- numeric(n2)
for (i in 1:n1) x1[i + 1] <- x1[i] + delta1 * rnorm(1)
for (i in 1:n2) x2[i + 1] <- x2[i] + delta2 * rnorm(1)
par(mfrow = c(1, 2))
plot.ts(x1, xlab = "", ylab = "", main = "N=30", col = 2)
grid()
plot.ts(x2, xlab = "", ylab = "", main = "N=1000", col = 2)
grid()
```

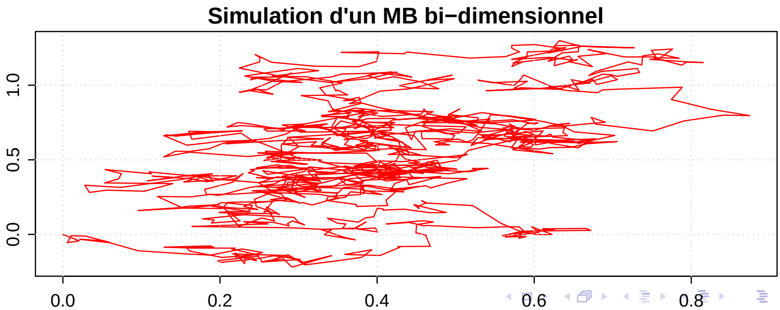


MBS multidimensionnel

Définition

Un MBS d−dimensionnel est un processus $W : [0, +\infty[\times\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$ tel que : si $W_t = (W_t^1, W_t^2, \ldots, W_t^d)$ les processus $(W_t^i,\ t \geq 0),\ 1 \leq i \leq d$ sont des MBS réels **indépendants**.

```
T <- 1 n <- 1000 delta <- T/n dx1 <- c(0, rnorm(n, 0, sqrt(delta))) dx2 <- c(0, rnorm(n,
0, sqrt(delta))) x1 <- cumsum(dx1) x2 <- cumsum(dx2) plot(x1, x2, ylab = "", type =
"l", main = "Simulation d'un MB bi-dimensionnel", col = 2) grid()
```



Mouvement Brownien Arithmétique

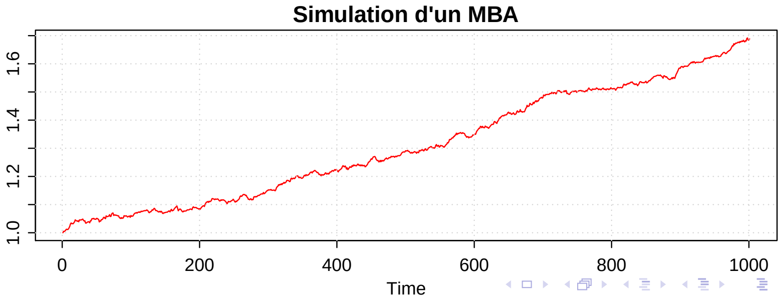
Le MBA ou MB avec dérive (drift) s'écrit comme suit :

$$dX_t = \underbrace{\mu dt}_{Trend} + \underbrace{\sigma dW_t}_{composantealatoire}$$

où μ est la dérive de processus, σ sa volatilité et W_t est un MBS.
Pour simuler une trajectoire du MBA sur un intervalle de temps $[t_0, T]$ avec un pas $\Delta t = (T - t_0)/n$, on procède comme suit :
1) Générer une v.a $Z \sim N(0, 1)$.
2) $i = i + 1$.
3) $W_[t_i] = W[t_{i-1}] + Z \times \sqrt{\Delta t}$.
4) $X[t_i] = X[t_{i-1}] + \mu\Delta t + \sigma \times (W_[t_i] - W[t_{i-1}])$.
5) si $i \leq n + 1$, réétérer à l'étape 1.

Mouvement Brownien Arithmétique

```
T <- 1
n <- 1000
dt <- T/n
dW <- sqrt(dt) * rnorm(n)
param <- c(0.75, 0.1)
X <- numeric(n)
X[1] <- 1
for (i in 1:n) {
    X[i + 1] <- X[i] + param[1] * dt + param[2] * dW[i]
}
plot.ts(X, ylab = "", type = "l", main = "Simulation d'un MBA", col = 2)
grid()
```



Movement Brownien Géométrique

Un MBA est inapproprié pour décrire l'évolution du prix d'une action, étant donné sa croissance espérée, désignée par μ et, l'écart-type du taux de rendement de l'action, représentée par σ.
On fait, donc, l'hypothèse que le prix d'une action obéir à un MBG ou le modèle de Black-Scholes :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t sW_t \tag{1}$$

où S_t est le prix de l'action. Donc le taux de rendement de l'action suit un MBA :

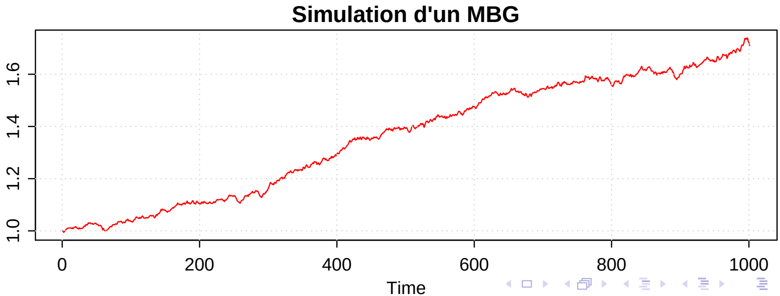
$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t.$$

On peut montrer que l'équation 1 admet comme solution analytique :

$$S_t = S_0 \exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W_t\right], \; S_0 > 0.$$

Movement Brownien Géométrique

```
T <- 1
n <- 1000
dt <- T/n
dW <- sqrt(dt) * rnorm(n)
param <- c(0.75, 0.1)
X <- numeric(n)
X[1] <- 1
for (i in 1:n) {
    X[i + 1] <- X[i] + param[1] * X[i] * dt + param[2] * X[i] * dW[i]
}
plot.ts(X, ylab = "", type = "l", main = "Simulation d'un MBG", col = 2)
grid()
```



Equations Différentielles Stochastiques

Définition

On appelle équation différentielle stochastique (EDS) une équation de type :

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t, \;\; X_0 = x_0 \tag{2}$$

La recherche d'une solution de l'équation 2, consiste à rechercher un processus $X_t, \; t \geq 0$ satisfaisant l'équation :

$$X_t = x_0 + \int_0^t \mu(t, X_t)dt + \int_0^t \sigma(t, X_t)dW_t \tag{3}$$

La solution de cette équation est appelée processus de diffusion, ou plus simplement une diffusion.
μ est appelé le coefficient de dérive et σ est le coefficient de diffusion.

Exemples d'EDS

Exemple 1 : Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck.
Ce processus est définit par la diffusion solution de l'équation :

$$dX_t = -rX_t dt + \sigma dW_t$$

Exemple 2 : Le processus de Cox-Ingersoll-Ross (CRR).
C'est la diffusion solution de l'équation :

$$dX_t = -\theta(X_t - \mu)dt + \sigma\sqrt{X_t}dt$$

Ce type des processus est utilisé en finance afin de modèliser le taux d'intérêt à court terme.
Exemple 3 : Le processus Ornstein-Uhlenbeck (OU).
Appelé aussi, processu Vasicek. Ce processus est définit par la diffusion solution de l'équation :

$$dX_t = (\theta_1 - \theta 2X_t)dt + \sigma dW_t, \; X_0 = x_0$$

Applications

Parmi les applications des EDS, on cite :

– La valorisation des options (achat ou vente).

– La gestion de risque des actifs financiers.

– Modèlisation des taux d'intérêt à court terme.