Modélisation & Simulation

Chapitre 2: Simulation des variables aléatoires

Mohamed Essaied Hamrita

Institut Supérieur de Mathématiques Appliqués & Informatique - Kairouan

Novembre 2012

M2: Ingénierie Financière

Plan du chapitre

Cadre général

Cadre général

Notations :

Cadre général

Notations :

Soit $\mathbb{X} \equiv$ ensemble des valeurs prises par une v.a.d X.

On suppose que $\mathbb{X} = \{x_i;\ i \leq M\}$ avec $M \leq \infty$.

Loi de X : $\mathbf{p} = \{p_i;\ i \leq M\}$ avec $p_i = Pr(X = x_i)$.

En général $\mathbb{X} = \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}^d, \mathbb{Z}^d$.

Cadre général

Notations :

Soit $\mathbb{X} \equiv$ ensemble des valeurs prises par une v.a.d X.

On suppose que $\mathbb{X} = \{x_i;\ i \leq M\}$ avec $M \leq \infty$.

Loi de X : $\mathbf{p} = \{p_i;\ i \leq M\}$ avec $p_i = Pr(X = x_i)$.

En général $\mathbb{X} = \mathbb{N},\ \mathbb{Z},\ \mathbb{N}^d,\ \mathbb{Z}^d$.

Exemple

$X \in \mathbb{X}$ avec $\mathbb{X} = \{(1,3),(2,3),(4,5)\}$.

Alors $M = 3,\ x_1 = (1,3),\ x_2 = (2,3),\ x_3 = (4,5)$.

On prend $p_1 = 1/2,\ p_2 = 1/4,\ p_3 = 1/4$.

Algorithme proposé

Algorithme proposé

Algorithme général :

On pose $g_0 = 0$ et $g_k = \sum_{i=1}^{k} p_i = Pr(X \in (x_1, x_2, \ldots, x_k))$.

Algorithme proposé

Algorithme général :

On pose $g_0 = 0$ et $g_k = \sum_{i=1}^{k} p_i = Pr(X \in (x_1, x_2, \ldots, x_k))$.

Théorème (Méthode de comparaison)

Soient $U \sim \mathcal{U}[0,1]$, *X et N définies par :*

- $N = 1$ *et* $X = x_1$ *si* $U < g_1$.

Algorithme proposé

Algorithme général :

On pose $g_0 = 0$ et $g_k = \sum_{i=1}^{k} p_i = Pr(X \in (x_1, x_2, \ldots, x_k))$.

Théorème (Méthode de comparaison)

Soient $U \sim \mathcal{U}[0,1]$, X et N définies par :

- $N = 1$ *et* $X = x_1$ *si* $U < g_1$.
- $N = k$ *et* $X = x_k$ *si* $g_{k-1} < U < g_k$.

Algorithme proposé

Algorithme général :

On pose $g_0 = 0$ et $g_k = \sum_{i=1}^{k} p_i = Pr(X \in (x_1, x_2, \ldots, x_k))$.

Théorème (Méthode de comparaison)

Soient $U \sim \mathcal{U}[0,1]$, X et N définies par :

- $N = 1$ *et* $X = x_1$ *si* $U < g_1$.
- $N = k$ *et* $X = x_k$ *si* $g_{k-1} < U < g_k$.

Algorithme proposé

Algorithme général :

On pose $g_0 = 0$ et $g_k = \sum_{i=1}^{k} p_i = Pr(X \in (x_1, x_2, \ldots, x_k))$.

Théorème (Méthode de comparaison)

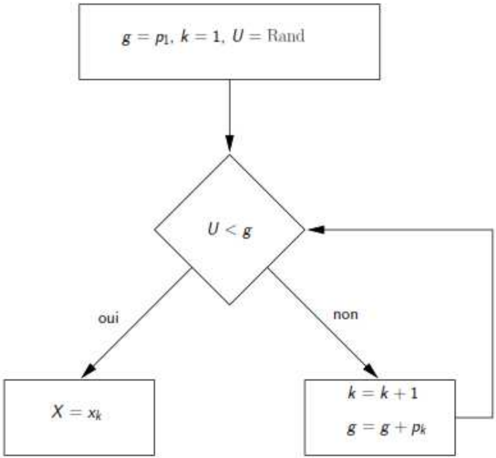
Soient $U \sim \mathcal{U}[0,1]$, X et N définies par :

- $N = 1$ *et* $X = x_1$ *si* $U < g_1$.
- $N = k$ *et* $X = x_k$ *si* $g_{k-1} < U < g_k$.

Alors

$$\mathcal{L}(X) = \mathbf{p} = \{p_i;\ i \leq M\} \quad \text{et } E(N) = \sum_{k=1}^{M} k p_k$$

Algorithme



Démonstration

Démonstration

On a

$$\begin{aligned} Pr(X = x_k) &= Pr(g_{k-1} \leq U \leq g_k \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} p_i - \sum_{i=1}^{k} p_i = p_k. \end{aligned}$$

Démonstration

On a

$$
\begin{aligned}
Pr(X = x_k) &= Pr(g_{k-1} \leq U \leq g_k \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} p_i - \sum_{i=1}^{k} p_i = p_k.
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
E(N) &= \sum_{k=1}^{M} kPr(N = k) \\
&= \sum_{k=1}^{M} kPr(X = x_k) = \sum_{k=1}^{M} kp_k
\end{aligned}
$$

Exemple 1 : Loi de Bernoulli

Exemple 1 : Loi de Bernoulli

Considérons une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre p. Puisque $Pr(X = 0) = 1 - p$ et $Pr(X = 1) = p$, la méthode de comparaison donne dans ce cas :

Exemple 1 : Loi de Bernoulli

Considérons une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre p. Puisque $Pr(X = 0) = 1 - p$ et $Pr(X = 1) = p$, la méthode de comparaison donne dans ce cas :

- $X = 0 \quad \text{si} \quad 0 \leq U \leq 1 - p.$

Exemple 1 : Loi de Bernoulli

Considérons une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre p. Puisque $Pr(X = 0) = 1 - p$ et $Pr(X = 1) = p$, la méthode de comparaison donne dans ce cas :

- $X = 0 \quad \text{si} \;\; 0 \leq U \leq 1 - p.$
- $X = 1 \quad \text{si} \;\; 1 - p \leq U \leq p.$

Exemple 1 : Loi de Bernoulli

Considérons une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre p. Puisque $Pr(X = 0) = 1 - p$ et $Pr(X = 1) = p$, la méthode de comparaison donne dans ce cas :

- $X = 0 \quad \text{si} \quad 0 \leq U \leq 1 - p$.
- $X = 1 \quad \text{si} \quad 1 - p \leq U \leq p$.

Exemple 1 : Loi de Bernoulli

Considérons une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre p. Puisque $Pr(X = 0) = 1 - p$ et $Pr(X = 1) = p$, la méthode de comparaison donne dans ce cas :

- $X = 0 \quad \text{si} \quad 0 \leq U \leq 1 - p.$
- $X = 1 \quad \text{si} \quad 1 - p \leq U \leq p.$

En utilisant le fait que si U suit la loi $\mathcal{U}[0,1]$, alors $1 - U$ suit aussi la loi $\mathcal{U}[0,1]$, on aura l'algorithme suivant :

Exemple 1 : Loi de Bernoulli

Considérons une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre p. Puisque $Pr(X = 0) = 1 - p$ et $Pr(X = 1) = p$, la méthode de comparaison donne dans ce cas :

- $X = 0 \quad \text{si} \quad 0 \leq U \leq 1 - p$.
- $X = 1 \quad \text{si} \quad 1 - p \leq U \leq p$.

En utilisant le fait que si U suit la loi $\mathcal{U}[0,1]$, alors $1 - U$ suit aussi la loi $\mathcal{U}[0,1]$, on aura l'algorithme suivant :

```
Pour k = 1,2,...,n
Si (U < p)
  x[k] = 1
sinon x[k] = 0
Fin
```

Exemple 2

Exemple 2

On veut simuler la v.a.d x dont sa loi est donnée par :

Exemple 2

On veut simuler la v.a.d x dont sa loi est donnée par :

x_i	1	2	3	4
$Pr(X = x_i)$	0.2	0.15	0.25	0.4

Exemple 2

On veut simuler la v.a.d x dont sa loi est donnée par :

x_i	1	2	3	4
$Pr(X = x_i)$	0.2	0.15	0.25	0.4

```
U <- U[0,1]
Si U < 0.2    x = 1
Si 0.2 < U < 0.2 + 0.15 = 0.35    x = 2
Si 0.35 < U < 0.6   x = 3
Si 0.6 < U < 1   x = 4
```

Description de la méthode

Description de la méthode

On suppose qu'on peut simuler une v.a.d Y de d.d.p $q_i = Pr(Y = y_i)$ et on veut simuler une autre v.a.d X de d.d.p $p_i = Pr(X = x_i)$.

Description de la méthode

On suppose qu'on peut simuler une v.a.d Y de d.d.p $q_i = Pr(Y = y_i)$ et on veut simuler une autre v.a.d X de d.d.p $p_i = Pr(X = x_i)$.

S'il existe une constante c telle que : $\frac{p_j}{q_j} \leq c$, pour tout j, on peut simuler la v.a X comme suit :

Description de la méthode

On suppose qu'on peut simuler une v.a.d Y de d.d.p $q_i = Pr(Y = y_i)$ et on veut simuler une autre v.a.d X de d.d.p $p_i = Pr(X = x_i)$.
S'il existe une constante c telle que : $\frac{p_j}{q_j} \leq c$, pour tout j, on peut simuler la v.a X comme suit :

Étape 1 : Simuler les valeurs de Y.

Description de la méthode

On suppose qu'on peut simuler une v.a.d Y de d.d.p $q_i = Pr(Y = y_i)$ et on veut simuler une autre v.a.d X de d.d.p $p_i = Pr(X = x_i)$.
S'il existe une constante c telle que : $\frac{p_j}{q_j} \leq c$, pour tout j, on peut simuler la v.a X comme suit :

Étape 1 : Simuler les valeurs de Y.

Étape 2 : Générer des valeurs aléatoires U

Description de la méthode

On suppose qu'on peut simuler une v.a.d Y de d.d.p $q_i = Pr(Y = y_i)$ et on veut simuler une autre v.a.d X de d.d.p $p_i = Pr(X = x_i)$.
S'il existe une constante c telle que : $\frac{p_j}{q_j} \leq c$, pour tout j, on peut simuler la v.a X comme suit :

Étape 1 : Simuler les valeurs de Y.

Étape 2 : Générer des valeurs aléatoires U

Étape 3 : Si $p_j/q_j \leq c$, on prend $X = Y$, sinon, on revient à l'étape 1

Exemple

Exemple

Reprenant l'Exemple 2 du paragraphe précédent. On peut utiliser la méthode de rejet pour simuler les valeurs de X en prenant Y comme une v.a.d suivant la loi uniforme sur 1,2,3,4. Donc $q_j = 1/4$, $j = 1, \dots, 4$. On peut choisir la valeur de c comme :

$$c = \max \frac{p_j}{q_j} = 1.6$$

et on aura l'algorithme suivant :

Exemple

Reprenant l'Exemple 2 du paragraphe précédent. On peut utiliser la méthode de rejet pour simuler les valeurs de X en prenant Y comme une v.a.d suivant la loi uniforme sur 1,2,3,4. Donc $q_j = 1/4$, $j = 1, ..., 4$. On peut choisir la valeur de c comme :

$$c = \max \frac{p_j}{q_j} = 1.6$$

et on aura l'algorithme suivant :

```
Générer Y suivant la loi uniforme discrète.
Générer U suivant la loi uniforme
tant que U < 1.6*p, X=Y
```

Méthode de comparaison

Méthode de comparaison

On veut simuler une v.a X, sachant qu'on sait simuler deux v.a Y et Z telle que :

$$Pr(X = x_i) = \alpha Pr(Y = y_i) + (1 - \alpha) Pr(Z = z_i), \qquad \text{avec } 0 < \alpha < 1$$

Méthode de comparaison

On veut simuler une v.a X, sachant qu'on sait simuler deux v.a Y et Z telle que :

$$Pr(X = x_i) = \alpha Pr(Y = y_i) + (1 - \alpha) Pr(Z = z_i), \qquad \text{avec } 0 < \alpha < 1$$

Algorithme

```
1. Générer deux suites suivant les lois de Y et Z.
2. Générer un suite suivant la loi de X = aY+(1-a)Z.
```

Exemple

Exemple

On veut simuler les valeurs d'une v.a X telle que :

$$p_i = Pr(X = x_i) = \begin{cases} 0.05, & \text{Pour } x_i = 1, 2, 3, 4, 5 \\ 0.15, & \text{pour } x_i = 6, 7, 8, 9, 10. \end{cases}$$

Exemple

On veut simuler les valeurs d'une v.a X telle que :

$$p_i = Pr(X = x_i) = \begin{cases} 0.05, & \text{Pour } x_i = 1, 2, 3, 4, 5 \\ 0.15, & \text{pour } x_i = 6, 7, 8, 9, 10. \end{cases}$$

On a ici $p_i = Pr(X = x_i) = 0.5 \times Pr(Y = y_i) + 0.5 \times Pr(Z = z_i)$
où $Pr(Y = y_i) = 0.05/0.5 = 0.1$ pour $y_i = 1, \ldots, 10$ et

$$Pr(Z = z_i) = \begin{cases} 0, & \text{pour } z_i = 1, \ldots, 5; \\ 0.15/0.5 = 0.2, & \text{pour } z_i = 6, \ldots, 10. \end{cases}$$

Exemple

On veut simuler les valeurs d'une v.a X telle que :

$$p_i = Pr(X = x_i) = \begin{cases} 0.05, & \text{Pour } x_i = 1, 2, 3, 4, 5 \\ 0.15, & \text{pour } x_i = 6, 7, 8, 9, 10. \end{cases}$$

On a ici $p_i = Pr(X = x_i) = 0.5 \times Pr(Y = y_i) + 0.5 \times Pr(Z = z_i)$ où $Pr(Y = y_i) = 0.05/0.5 = 0.1$ pour $y_i = 1, \ldots, 10$ et

$$Pr(Z = z_i) = \begin{cases} 0, & \text{pour } z_i = 1, \ldots, 5; \\ 0.15/0.5 = 0.2, & \text{pour } z_i = 6, \ldots, 10. \end{cases}$$

Donc, pour simuler X, on génère U suivant la loi uniforme puis on prend X comme loi uniforme discrète sur $\{1, \ldots, 10\}$ si $U < 0.5$ et comme loi uniforme discrète sur $\{6, \ldots, 10\}$ sinon.

Exemple

Exemple

Algorithme

```
1. Générer U comme loi uniforme.
2. Si U<0.5, X suit la loi uniforme discrète sur
   {1,...,10} et comme loi uniforme discrète sur
   {5,...,10} sinon.
```

Méthode de transformation inverse

Les méthodes exposées pour la simulation des v.a.d sont applicables pour la simulation des v.a.c.

Méthode de transformation inverse :

Proposition

Soit U une v.a.c uniforme sur $[0,1]$. Pour toute v.a.c X définie par

$$X = F^{-1}(U), \qquad \text{où } F \text{ est la f.r de } U$$

admet F comme fonction de répartition.

Démonstration

Démonstration

$$\begin{aligned} F_X(x) &= Pr(X \leq x) \\ &= Pr(F^{-1}(U) \leq x) \end{aligned}$$

et comme F est une fonction monotone croissante, alors si $a \leq b \implies F(a) \leq F(b)$. D'où

Démonstration

$$
\begin{aligned}
F_X(x) &= Pr(X \leq x) \\
&= Pr(F^{-1}(U) \leq x)
\end{aligned}
$$

et comme F est une fonction monotone croissante, alors si $a \leq b \implies F(a) \leq F(b)$. D'où

$$
\begin{aligned}
F_X(x) &= Pr(F(F^{-1}(U)) \leq F(x)) \\
&= Pr(U \leq F(x)) \\
&= F(x) \quad \text{car } U \sim \mathcal{U}[0,1]
\end{aligned}
$$

Exemple

Exemple

On veut générer la v.a.c dont sa fonction de répartition est

$$F(x) = x^n \quad \text{si } 0 < x < 1.$$

Exemple

On veut générer la v.a.c dont sa fonction de répartition est

$$F(x) = x^n \quad \text{si } 0 < x < 1.$$

si on pose $x = F^{-1}(u)$, on obtient $u = F(x) = x^n \implies x = u^{1/n}$
Afin de générer la v.a X, on simule U une v.a uniforme sur $[0, 1]$
puis on prend $X = U^{1/n}$

Méthode de rejet

Méthode de rejet

Méthode

Méthode de rejet

Méthode

Soient f, g deux densités de probabilités sur $\mathbb{R}$ telles que :

Méthode de rejet

Méthode

Soient f, g deux densités de probabilités sur $\mathbb{R}$ telles que :

- On sait simuler des v.a de densité g.

Méthode de rejet

Méthode

Soient f, g deux densités de probabilités sur $\mathbb{R}$ telles que :

- On sait simuler des v.a de densité g.
- Il existe $c > 1$ tel que $f(x) \leq cg(x)$

Méthode de rejet

Méthode

Soient f, g deux densités de probabilités sur $\mathbb{R}$ telles que :

- On sait simuler des v.a de densité g.
- Il existe $c > 1$ tel que $f(x) \leq cg(x)$

Méthode de rejet

Méthode

Soient f, g deux densités de probabilités sur $\mathbb{R}$ telles que :

- On sait simuler des v.a de densité g.
- Il existe $c > 1$ tel que $f(x) \leq cg(x)$

On pose alors $h(x) = \dfrac{f(x)}{cg(x)}$

Méthode de rejet

Méthode

Soient f, g deux densités de probabilités sur $\mathbb{R}$ telles que :

- On sait simuler des v.a de densité g.
- Il existe $c > 1$ tel que $f(x) \leq cg(x)$

On pose alors $h(x) = \dfrac{f(x)}{cg(x)}$

Algorithme

```
1. Générer Y de densité g.

2. Générer U suivant une loi uniforme.

3. Si U <= h(x)=f(x)/(c g(x)), X=Y et on boucle sinon.
```

Exemple

Utiliser la méthode de rejet pour simuler la v.a X définie par :

$$f(x) = 20x(1-x)^3, \quad 0 < x < 1.$$

Exemple

Utiliser la méthode de rejet pour simuler la v.a X définie par :

$$f(x) = 20x(1-x)^3, \quad 0 < x < 1.$$

Puisque f est définie sur $[0,1]$, on peut choisir $g(x) = 1$ pour tout $0 < x < 1$.

Exemple

Utiliser la méthode de rejet pour simuler la v.a X définie par :

$$f(x) = 20x(1-x)^3, \quad 0 < x < 1.$$

Puisque f est définie sur $[0,1]$, on peut choisir $g(x) = 1$ pour tout $0 < x < 1$.
Pour déterminer la constante c, on peut chercher le maximum de la fonction $\varphi(x) = f(x)/g(x)$. On peut montrer que $c = 135/64$.
D'où :

Exemple

Utiliser la méthode de rejet pour simuler la v.a X définie par :

$$f(x) = 20x(1-x)^3, \quad 0 < x < 1.$$

Puisque f est définie sur $[0,1]$, on peut choisir $g(x) = 1$ pour tout $0 < x < 1$.
Pour déterminer la constante c, on peut chercher le maximum de la fonction $\varphi(x) = f(x)/g(x)$. On peut montrer que $c = 135/64$.
D'où :

```
1. Générer Y et U comme loi uniforme.

2. SI U<=h(Y), X=Y et on boucle sinon.
```

Méthode de composition

Méthode de composition

But :

Méthode de composition

But : On veut simuler une v.a X telle que :
$\mathcal{L}(\mathbf{X}) = \alpha \times \mu_{\mathbf{1}} + (\mathbf{1} - \alpha) \times \mu_{\mathbf{2}} \equiv \mu$ où μ_1, μ_2 lois de probabilités et $0 < \alpha < 1$.

Méthode de composition

But : On veut simuler une v.a X telle que :
$\mathcal{L}(\mathbf{X}) = \alpha \times \mu_{\mathbf{1}} + (\mathbf{1} - \alpha) \times \mu_{\mathbf{2}} \equiv \mu$ où μ_1, μ_2 lois de probabilités et $0 < \alpha < 1$.

Proposition

Soient $X_1 \sim \mu_1$,$X_2 \sim \mu_2$ *et* $U \sim \mathcal{U}[0,1]$ *indépendants. Soit*
$X = X_1 \mathbb{1}_{U \leq \alpha} + X_2 \mathbb{1}_{U > \alpha}$ *Alors* $X \sim \mu$.

Exemple

Exemple

Soit X une v.a dont sa densité est :

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{si } -1 \leq x \leq 0, \\ -x+1, & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour simuler des valeurs de X, on simule $U_1 \sim U[0,1]$ et $U_2 \sim U[0,1]$ indépendamment.
Or $U_1 + U_2 \sim U[0,2]$ donc,

$$\begin{aligned} X &= U_1 + U_2 - 1 \\ &= \underbrace{(U_1 - 0.5)}_{X_1} + \underbrace{(U_2 - 0.5)}_{X_2} \end{aligned}$$

Méthode Polaire

Méthode Polaire

Cette méthode est utilisée pour la simulation des valeurs d'une loi Normale.

Méthode Polaire

Cette méthode est utilisée pour la simulation des valeurs d'une loi Normale.

Méthode

Méthode Polaire

Cette méthode est utilisée pour la simulation des valeurs d'une loi Normale.

Méthode

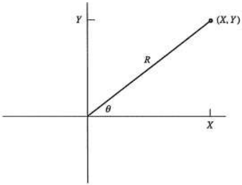
Soient X et Y deux v.a normales indépendantes et soient R et θ les coordonnées polaires du couple (X, Y) (voir fig suivante).

Méthode Polaire

Cette méthode est utilisée pour la simulation des valeurs d'une loi Normale.

Méthode

Soient X et Y deux v.a normales indépendantes et soient R et θ les coordonnées polaires du couple (X, Y) (voir fig suivante).

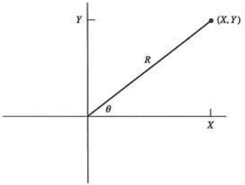


Méthode Polaire

Cette méthode est utilisée pour la simulation des valeurs d'une loi Normale.

Méthode

Soient X et Y deux v.a normales indépendantes et soient R et θ les coordonnées polaires du couple (X, Y) (voir fig suivante).



$$R^2 = X^2 + Y^2$$

$$\tan\theta = \frac{Y}{X}$$

Méthode polaire

Méthode polaire

Proposition

Soient U et V deux v.a indépendantes de loi $\mathcal{U}[0,1]$. On pose

$$\mathbf{X} = \sqrt{-\mathbf{2}\ln \mathbf{U}}\cos(\mathbf{2}\pi\mathbf{V}),\ \mathbf{Y} = \sqrt{-\mathbf{2}\ln \mathbf{U}}\sin(\mathbf{2}\pi\mathbf{V})$$

Alors X et Y sont deux v.a indépendantes de loi normale.

Méthode polaire

Proposition

Soient U et V deux v.a indépendantes de loi $\mathcal{U}[0,1]$. On pose

$$\mathbf{X} = \sqrt{-\mathbf{2}\ln \mathbf{U}}\cos(\mathbf{2}\pi\mathbf{V}),\ \mathbf{Y} = \sqrt{-\mathbf{2}\ln \mathbf{U}}\sin(\mathbf{2}\pi\mathbf{V})$$

Alors X et Y sont deux v.a indépendantes de loi normale.

Algorithme

Méthode polaire

Proposition

Soient U et V deux v.a indépendantes de loi $\mathcal{U}[0,1]$. On pose

$$\mathbf{X} = \sqrt{-\mathbf{2}\ln \mathbf{U}}\cos(\mathbf{2}\pi\mathbf{V}),\ \mathbf{Y} = \sqrt{-\mathbf{2}\ln \mathbf{U}}\sin(\mathbf{2}\pi\mathbf{V})$$

Alors X et Y sont deux v.a indépendantes de loi normale.

Algorithme

1. Générer U et V.

Méthode polaire

Proposition

Soient U et V deux v.a indépendantes de loi $\mathcal{U}[0,1]$. On pose

$$\mathbf{X} = \sqrt{-\mathbf{2}\ln \mathbf{U}}\cos(\mathbf{2}\pi\mathbf{V}),\ \mathbf{Y} = \sqrt{-\mathbf{2}\ln \mathbf{U}}\sin(\mathbf{2}\pi\mathbf{V})$$

Alors X et Y sont deux v.a indépendantes de loi normale.

Algorithme

1. `Générer U et V.`
2. `X=sqrt(-2*lnU)*cos(2*pi*V),Y=sqrt(-2*lnU)*sin(2*pi*V)`