Université Kairouan – ISMAI

Corrigé de l'examen Janvier 2013 - Série temporelle
2ieme année mastère Ingénierie Financière

Exercice 1 :

$$X_t = -0.8X_{t-1} + 0.1X_{t-2} + \epsilon_t$$

1) Le processus X_t est un processus AR(2), donc il est stationnaire ssi :

$$\begin{cases} \phi_1 + \phi_2 < 1 \\ \phi_2 - \phi_1 < 1 \\ |\phi_2| < 1 \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{cases} \phi_1 + \phi_2 = -0.8 + 0.1 = -0.7 < 1 \\ \phi_2 - \phi_1 = 0.1 - (-0.8) = 0.9 < 1 \\ |\phi_2| = 0.1 < 1 \end{cases}$$

donc X_t est stationnaire.
2) Le processus X_t est un processus AR(2), donc il est inversible (un processus AR est toujours inversible) et puisqu'il est stationnaire, donc il admet une représentation moyenne mobile infinie :

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \epsilon_{t-j} = \Psi(L)\epsilon_t \text{ où } L \text{ est l'opérateur retard.}$$

avec $\Psi(L) = \psi_0 + \psi_1 L + \psi_2 L^2 + \ldots + \psi_j L^j + \ldots$
or $X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \epsilon_t \Rightarrow (1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2)X_t = \epsilon_t \Rightarrow \Phi(L)X_t = \epsilon_t \Rightarrow X_t = \Phi(L)^{-1}\epsilon_t$.
Donc $\Phi(L)^{-1} = \Psi(L) \Rightarrow 1 = \Phi(L)\Psi(L) = (1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2)(\psi_0 + \psi_1 L + \psi_2 L^2 + \ldots)$
Soit $1 = \psi_0 + (\psi_1 - \phi_1\psi_0)L + (\psi_2 - \phi_1\psi_1 - \phi_2\psi_0)L^2 + (\psi_3 - \phi_1\psi_2 - \phi_2\psi_1)L^3 + \ldots$
Par identification, on obtient : $\psi_0 = 1$, $\psi_1 - \phi_1\psi_0 = 0 \Rightarrow \psi_1 = \phi_1\psi_0 = -0.8$
et $\psi_j - \phi_1\psi_{j-1} - \phi_2\psi_{j-2} = 0 \Rightarrow \psi_j = \phi_1\psi_{j-1} - \phi_2\psi_{j-2}$, pour tout $j = 2, 3, 4, \ldots$.
Ainsi, on obtient :

j	0	1	2	3	4	5
ψ_j	1	-0.8	0.74	-0.672	0.611	-0.556

Remarque : Avec `R`, on retrouve le résultat en tapant la ligne de commande suivante :

```
 > ARMAtoMA(ar=c(-0.8,0.1), lag.max=5)
[1] -0.80000  0.74000 -0.67200  0.61160 -0.55648
```

3) La fonction d'auto-corrélation (ACF) d'un processus AR(p) vérifie la relation suivante :

$$\rho(k) = \phi_1\rho(k-1) + \phi_2\rho(k-2) + \ldots + \phi_p\rho(k-p)$$

avec $\rho(0) = 1$ et $\rho(-k) = \rho(k)$
D'où, $\rho(1) = \phi_1\rho(0) + \phi_2\rho(1) \implies \rho(1) = \dfrac{\phi_1}{1-\phi_2} = -0.888$.
$\rho(2) = \phi_1\rho(1) + \phi_2\rho(0) = 0.811$.
De la même manière, on calcul les autres coefficients.

k	0	1	2	3	4	5
$\rho(k)$	1	-0.888	0.811	-0.737	0.6713	-0.6108

La fonction d'auto-corrélation partielle (PACF) d'un processus AR(p) s'annule à partir du retard $k = p+1$. Donc $\phi_{kk} = 0$ pour tout $k = 3, 4, \ldots$. Il nous reste donc, à calculer ϕ_{kk} pour $k = \{1, 2\}$.

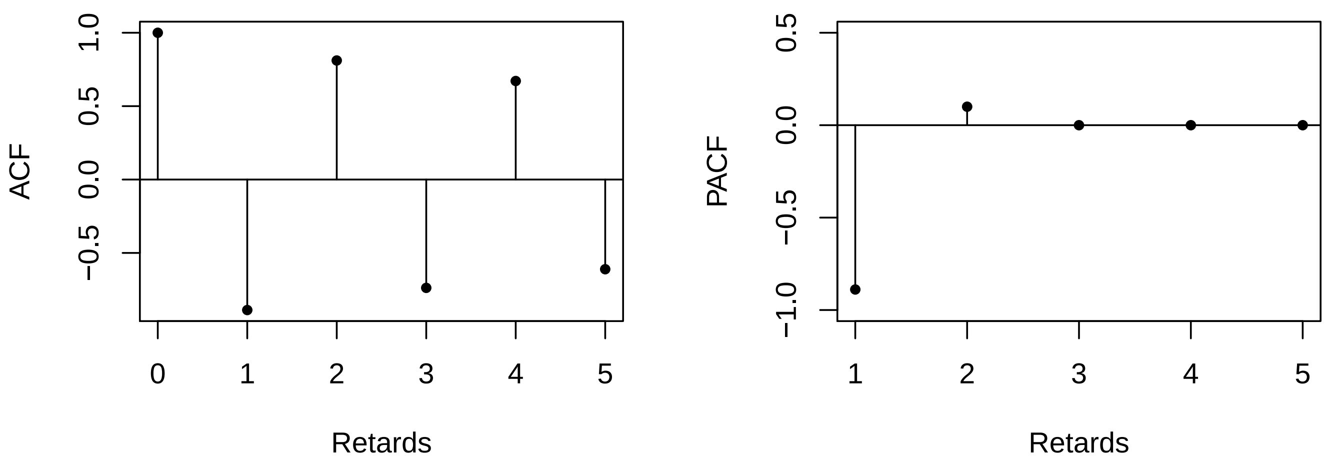
La PACF se calcule à l'aide de la relation suivante : $\phi_{11} = \rho(1)$ et $\phi_{kk} = \dfrac{|\mathcal{R}^*(k)|}{|\mathcal{R}(k)|}$ avec

$$\mathcal{R}(k) = \begin{pmatrix} \rho(0) & \rho(1) & \cdots & \rho(k-1) \\ \rho(1) & \rho(0) & \cdots & \rho(k-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho(k-1) & \rho(k-2) & \cdots & \rho(0) \end{pmatrix}$$

et $\mathcal{R}^*(k)$ est la matrice obtenue après le remplacement de la dernière colonne de $\mathcal{R}(k)$ par $(\rho(1), \rho(2), \ldots, \rho(k))^t$.

$\phi_{11} = \rho(1) = -0.888$ et $\phi_{22} = \dfrac{\begin{vmatrix} \rho(0) & \rho(1) \\ \rho(1) & \rho(2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \rho(0) & \rho(1) \\ \rho(1) & \rho(0) \end{vmatrix}} = \dfrac{\rho(0)\rho(2) - \rho(1)^2}{\rho(0)^2 - \rho(1)^2} = 0.1.$

Le corrélogramme et le corrélogramme partielle sont représentés comme suit :



Remarque : Afin de déterminer les coefficients d'auto-corrélations théoriques avec `R`, on exécute les lignes de commande suivantes :

```
# ACF
 > ARMAacf(ar=c(-0.8,0.1), lag.max=5)
         0          1          2          3          4          5
 1.0000000 -0.8888889  0.8111111 -0.7377778  0.6713333 -0.6108444
# PACF
 > round(ARMAacf(ar=c(-0.8,0.1), lag.max=5,pacf=T),6)
[1] -0.888889  0.100000  0.000000  0.000000  0.000000
```

Exercice 2 :

$$r_t = 0.01 r_{t-1} + 0.1 r_{t-2} + \epsilon_t \quad \text{où} \;\; \epsilon_t \sim BB(0, 0.02)$$

1) Le processus r_t est un processus $AR(2)$ de moyenne **nulle**. Donc $E(r_t) = 0$.

Remarque : D'une manière générale, pour un processus $AR(p)$:

$$X_t = \mu + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \ldots + \phi_p X_{t-p} + \epsilon_t$$

on a $E(X_t) = \dfrac{\mu}{\Phi(1)}$ où $\Phi(L) = 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \ldots - \phi_p L^p$.
La variance du processus peut être déduite à partir les équations de Yule-Walker :

$$\gamma(0) - \phi_1\gamma(1) - \phi_2\gamma(2) = \sigma^2 \implies \gamma(0)\left[1 - \phi_1\frac{\gamma(1)}{\gamma(0)} - \phi_2\frac{\gamma(2)}{\gamma(0)}\right] = \sigma^2$$

$$\implies \sigma^2 = \gamma(0)\left[1 - \phi_1\rho(1) - \phi_2\rho(2)\right] \tag{1}$$

Or, $\rho(k) - \phi_1\rho(k-1) - \phi_2\rho(k-2) = 0,\ \ \forall\, k = 1, 2, \ldots$, d'où $\rho(1) - \phi_1\rho(0) - \phi_2\rho(1) = 0$

$$\implies \rho(1) = \frac{\phi_1}{1-\phi_2} \tag{2}$$

et $\rho(2) - \phi_1\rho(1) - \phi_2\rho(0) = 0$

$$\implies \rho(2) = \frac{\phi_1^2}{1-\phi_2} - \phi_2 \tag{3}$$

D'après (1), (2) et (3), on aura :

$$\gamma(0) = \left[1 - \frac{\phi_1^2}{1-\phi_2} - \frac{\phi_1^2\phi_2}{1-\phi_2} + \phi_2^2\right]^{-1}\sigma^2$$

Soit $\gamma(0) = \left[1 - \dfrac{(0.01)^2}{0.9} - \dfrac{(0.01)^2 0.1}{0.9} + (0.1)^2\right]^{-1} \times 0.02 \implies \gamma(0) = V(r_t) = 0.0198.$
3) Soit $\widehat{r}_{t+1} = E(r_{t+1}/r_{t-1}, r_{t-2}, \ldots, r_0) = 0.01 r_t + 0.1 r_{t-1}$
D'où $\widehat{r}_{101} = 0.01 r_{100} + 0.1 r_{99} = 0.0019$ et $\widehat{r}_{102} = 0.01 r_{101} + 0.1 r_{100} = -0.000981$.
4) L'erreur de prévision est donnée par : $e_{t+h} = r_{t+h} - \widehat{r}_{t+h} = \epsilon_{t+h}$.
D'où $e_{101} = \epsilon_{101} \implies V(e_{101}) = V(\epsilon_{101}) = 0.02$.
Et $e_{102} = r_{102} - \widehat{r}_{102} = \phi_1(r_{101} - \widehat{r}_{101}) + \epsilon_{102} = \phi_1\epsilon_{101} + \epsilon_{102}$.
Donc, $V(e_{102}) = \phi_1^2 V(\epsilon_{101}) + V(\epsilon_{102}) = 0.02(1 + 0.01^2) = 0.020$.

Exercice 3 :
1) Simulation de 300 réalisations d'un processus $AR(1)$ avec $\phi_1 = 0.8$ se fait en tapant la ligne de commande suivante :

```
X<-arima.sim(list(ar=0.8),n=300,sd=1)
```

2) Calcul et représentation graphique des coefficients d'auto-corrélations et d'auto-corrélations partielles **empiriques** :

```
acf(X,lag.max=30)  # ACF
pacf(X,lag.max=30) # PACF
```

Remarque : Pour le calcul des coefficients AC et ACP **théoriques**, on utilise la fonction `ARMAacf` (voir Exercice 1).

Exercice 4 :
Le processus X_t est un processus $ARMA(1,1)$. Donc il est stationnaire si $|\phi| < 1$ et inversible si $|\theta| < 1$.

1) Puisque $|\phi| < 1$ et $|\theta| < 1$, donc le processus est stationnaire et inversible. Ainsi, il admet une représentation moyenne mobile infinie :

$$\begin{aligned}
(X_t - \phi X_{t-1}) &= Z_t - \theta Z_{t-1} \Longrightarrow (1-\phi L)X_t = (1-\theta L)Z_t \\
\Longrightarrow X_t &= \frac{1-\theta L}{1-\phi L} Z_t = \Psi(L) Z_t \\
\Longrightarrow 1-\theta L &= (1-\phi L)(\psi_0 + \psi_1 L + \psi_2 L^2 + \ldots) \\
\Longrightarrow 1-\theta L &= \psi_0 + (\psi_1 - \phi\psi_0)L + (\psi_2 - \phi\psi_1)L^2 + (\psi_3 - \phi\psi_2)L^3 + \ldots
\end{aligned}$$

Par identification, on obtient : $\psi_0 = 1$, $\psi_1 - \phi\psi_0 = -\theta \Longrightarrow \psi_1 = \phi - \theta$,
et $\psi_j - \phi\psi_{j-1} = 0$, $\forall\, j = 2, 3, \ldots$
Donc on a

$$\boxed{\begin{cases} \psi_0 = 1, \psi_1 = \phi - \theta \\ \psi_j = \phi\psi_{j-1} = \phi^{j-1}(\phi - \theta) \quad j = 2, 3, \ldots \end{cases}}$$