Eléments du corrigé
TD 5. Proba-Stat

Ex2 : $$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \quad x \in \mathbb{R}.$$

Par définition, $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$

$$= (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$$

$$= (2\pi)^{-1/2} \left[\int_{-\infty}^{0} x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx + \int_{0}^{+\infty} x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \right]$$

$$= (2\pi)^{-1/2} \left(\left[-\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \right]_{-\infty}^{0} + \left[-\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \right]_{0}^{+\infty} \right)$$

$$= (2\pi)^{-1/2} \left(-1 + 0 - 0 + 1 \right) = 0$$

Ainsi $\underline{E(X) = 0}$.

RQ : ⊛ On peut remarquer que $f(x)$ est la d.d.p de la loi normale centrée réduite, càd $X \sim N(0, 1)$ d'où $E(X) = 0$.

Ex3 :

1) $f(x)$ est une d.d.p $\Longleftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1. \end{cases}$

i) $f(x) \geq 0 \Rightarrow k\,x(2-x) \geq 0,\quad x \in]0,2[.$

$$\Rightarrow \boxed{k > 0}$$

ii) $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1 \Longleftrightarrow k\int_0^2 x(2-x)\,dx = 1$

$$\Longleftrightarrow k\left[x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^2 = 1 \Longleftrightarrow \boxed{k = \frac{3}{4}}$$

2) La f.r est définie par :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt.$$

- Si $x \leq 0$, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0.dt = 0.$

- Si $x \in]0,2[$, $F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0.dt + \int_0^x \frac{3}{4}t(2-t)\,dt$

$$= \frac{3}{4}\left(x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)$$

- Si $x \geq 2$, $F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0.dt + \int_0^2 \frac{3}{4}t(2-t)\,dt + \int_2^{+\infty} 0.dt$

$$= 1$$

Ainsi $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{3}{4}\left(x^2 - \frac{1}{3}x^3\right) & \text{si } x \in]0,2[\\ 1 & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$

3) $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \int_0^2 \frac{3}{4} x^2 (2-x)\,dx$

$$= \frac{3}{4}\left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^2 = 1$$

Soit $\boxed{E(X) = 1}$

. $E\left(\frac{1}{X}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x} f(x)\,dx = \int_0^2 \frac{3}{4}(2-x)\,dx$

$$= \left[\frac{3}{2}x - \frac{3}{8}x^2\right]_0^2 = \frac{3}{2}.$$

<u>Ex5</u>: $\quad f(x) = \exp(-(x-\theta))\, \mathbb{1}_{]\theta, +\infty[}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$

1°) $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$.

- Si $x \leq \theta$, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0.\,dt = 0$

- Si $x > \theta$, $F(x) = \int_\theta^x \exp(-(t-\theta))\,dt$

$$= \left[-\exp(-(t-\theta))\right]_\theta^x$$

$$= 1 - \exp(-(x-\theta))$$

Ainsi $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq \theta \\ 1 - \exp(-(x-\theta)) & \text{si } x > \theta. \end{cases}$

2°) $Y = \min(X_1, X_2, \dots X_n)$.

Soit G la f.r de la v.a. Y.

Par définition, $G(y) = P(Y \leq y) = p(\min(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq y)$

$$= 1 - p(\min(X_1, X_2, \dots, X_n) > y)$$

$$= 1 - p((X_1 > y) \cap (X_2 > y) \cap \dots \cap (X_n > y))$$

$$= 1 - (1 - F(y))^n$$

D'où $G(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq \theta \\ 1 - \exp(-n(y-\theta)) & \text{si } y > \theta. \end{cases}$

$$g(y) = G'(y) = n f(y) (1 - F(y))^{n-1}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq \theta \\ n \exp(-n(y-\theta)) & \text{si } y > \theta. \end{cases}$$

Ex6 : $F(x) = \frac{1}{2} + \frac{Arctg(x)}{\pi}$, $x \in \mathbb{R}$.

1) $F(x)$ est une f.r ssi : $\begin{cases} \lim\limits_{-\infty} F(x) = 0, \ \lim\limits_{+\infty} F(x) = 1 \\ F(x) \text{ est continue } \nearrow. \end{cases}$

. $\lim\limits_{-\infty} F(x) = \lim\limits_{-\infty} \left[\frac{1}{2} + \frac{Arctg(x)}{\pi}\right] = \frac{1}{2} + \frac{-\pi/2}{\pi} = 0$

. $\lim\limits_{+\infty} F(x) = \lim\limits_{+\infty} \left[\frac{1}{2} + \frac{Arctg(x)}{\pi}\right] = \frac{1}{2} + \frac{\pi/2}{\pi} = 1$.

. $F(x)$ est continue ~~est~~ dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\forall x \in \mathbb{R}$,

On a : $F'(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

donc $F(x)$ est continue croissante sur $\mathbb{R}$.

Ainsi $F(x)$ définie ~~p~~ bien une f.r.

2) $x \,/\, p(X > x) = \frac{1}{3}$.

$p(X > x) = 1 - F(x) = \frac{1}{3}$.

$\Leftrightarrow F(x) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{2} + \frac{Arctg(x)}{\pi} = \frac{2}{3}$

$\Leftrightarrow Arctg(x) = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \boxed{x = \frac{\sqrt{3}}{3}}$

Ex8 : $Y = \left(\frac{X}{\alpha}\right)^{\beta}$

Soit G la f.r de la v.a Y.

$$G(y) = p(Y \leq y) = p\left(\left(\frac{X}{\alpha}\right)^{\beta} \leq y\right) = p\left(\frac{X}{\alpha} \leq y^{1/\beta}\right)$$

$$= p\left[X \leq \alpha y^{1/\beta}\right] = F\left(\alpha y^{1/\beta}\right)$$

d'où $g(y) = G'(y) = \frac{\alpha}{\beta} y^{\frac{1-\beta}{\beta}} f\left(\alpha y^{1/\beta}\right)$

$$= \frac{\alpha}{\beta} y^{\frac{1-\beta}{\beta}} \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{\alpha y^{1/\beta}}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{\alpha y^{1/\beta}}{\alpha}\right)^{\beta}\right]$$

$$= y^{\frac{1-\beta}{\beta}} y^{\frac{\beta-1}{\beta}} \exp(-y) = \exp(-y).$$

- Si $x \in]0, +\infty[$, alors $y \in]0, +\infty[$.

Ainsi $\boxed{g(y) = \exp(-y) \mathbb{1}_{]0, +\infty[}}$

Donc $\boxed{Y \sim \mathcal{E}(1)}$