Corrigé du DS : Proba-Stat

Ex1 :

1) Faux, ne contient pas $A \cup B$.

2) Faux, prendre $A = B$ ~~avec~~ de probabilité $\frac{1}{2}$.

3) Faux, $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A) \cdot p(B)$ (A et B sont indép).

4) Faux, $A \cap B$ est négligeable.

Ex2

Soient D : "La pièce est défectueuse"

On cherche à calculer $p(A/D)$ qui est la prob pour qu'une pièce ait été fabriquée par la machine A, étant acquis qu'elle est défectueuse.

D'après le théorème de Bayes, on a :

$$p(A/D) = \frac{P(A)\, p(D|A)}{P(A)\, p(D/A) + p(B)\, p(D/B) + p(C)\, p(D/C)}$$

$$= \frac{0{,}25 \times 0{,}05}{0{,}25 \times 0{,}05 + 0{,}35 \times 0{,}04 + 0{,}4 \times 0{,}02} = 36{,}23\%.$$

Ex3 :

$$P(X=x) = \frac{k}{2^x x!} \quad \forall x \in \mathbb{N}.$$

1) $P(X=x)$ est une loi de prob discrète donc,

$$\sum_{x\in\mathbb{N}} P(X=x) = 1 \iff k \sum_{x=0}^{\infty} \frac{2^{-x}}{x!} = 1$$

$$\iff k \sum_{x=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x \frac{1}{x!} = 1 \quad \text{or} \quad \sum_{x=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x \frac{1}{x!} = e^{\frac{1}{2}}$$

d'où $k\sqrt{e} = 1$ soit $\boxed{k = 1/\sqrt{e}}$

2) Par définition, $E(X) = \sum_{x\in\mathbb{N}} x\, p(X=x)$.

donc $$E(X) = \frac{1}{\sqrt{e}} \sum_{x=0}^{\infty} x \left(\frac{1}{2}\right)^x \frac{1}{x!} = \frac{1}{2\sqrt{e}} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}}{(x-1)!}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{e}} \sqrt{e}, \text{ soit } \boxed{E(X) = \frac{1}{2}}$$

La variance est donné par : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

or $$E(X^2) = \sum_{x\in\mathbb{N}} x^2 P(X=x) = \frac{1}{\sqrt{e}} \sum_{x=0}^{\infty} x^2 \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{x!}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{e}} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{x \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}}{(x-1)!} = \frac{1}{2\sqrt{e}} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{(x-1+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}}{(x-1)!}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{e}} \left(\sum_{x=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}}{(x-1)!} + \frac{1}{2} \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}}{(x-2)!} \right)$$

D'où $E(X^2) = \frac{1}{2\sqrt{e}}\left(\sqrt{e} + \frac{1}{2}\sqrt{e}\right) = \frac{3}{4}$

Ainsi $\boxed{V(X) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}}$

3) $\sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2 = C_{2n}^k$

$(1+x)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k x^k = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 x + \dots + C_{2n}^n x^n + \dots + C_{2n}^{2n} x^{2n}$

donc C_{2n}^n est le coefficient de x^n dans le développement de $(1+x)^{2n}$.

D'autre part: $(1+x)^{2n} = (1+x)^n (1+x)^n$

$= \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k\right)$

Dans le dernier développement, le coef de x^n est:

$\sum_{k=0}^{n} C_n^k C_n^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2$.

donc $\boxed{\sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2 = C_{2n}^n}$