Séries temporelles

Chapitre 2: Processus linéaires

Mohamed Essaied Hamrita
hamrita.e-monsite.com

Institut Supèrieur de Mathématiques Appliqués & Informatique - Kairouan

Octobre 2012

M2: Ingénierie Financière

Plan du chapitre

Processus linéaires

Définition (Processus linéaires)

Une série temporelle $\{X_t, \ t \in T\}$ est dite **linéaire** si on peut l'écrire sous la forme :

$$X_t = m + \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k \epsilon_{t-k}$$

où m est la moyenne de X_t, $\theta_0 = 1$ et ϵ_t est un processus BB avec $E(\epsilon_t) = 0$, $V(\epsilon_t) = \sigma^2$ et $Cov(\epsilon_t, \epsilon_{t-h}) = 0$ pour tout $h \neq 0$.

Décomposition de Wold

Théorème (Décomposition de Wold)

Toute série temporelle stationnaire au second ordre peut être écrite sous la forme :

$$X_t = m + \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k \epsilon_{t-k}$$

où m est la moyenne de X_t, $\theta_0 = 1$ et ϵ_t est un processus BB avec $E(\epsilon_t) = 0$, $V(\epsilon_t) = \sigma^2$ et $Cov(\epsilon_t, \epsilon_{t-h}) = 0$ pour tout $h \neq 0$.

Interprétation : Toute série temporelle stationnaire peut être décomposer en une somme de deux processus, une partie purement déterministe (m) et une partie purement aléatoire (ϵ_t).

Fonction d'auto-covariance et d'auto-corrélation

Définition

On appelle fonction d'auto-covariance (resp. d'auto-corrélation **FAC**) la fonction γ (resp. ρ) définie de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall\ t\ \in \mathbb{Z},\quad \gamma(h) = Cov(X_t, X_{t-h}) \quad (\text{ resp. } \rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma((0)}).$$

Son graphe est appelé variogramme (resp. corrélogramme).

Propriétés :

- $\forall\ h\ \in \mathbb{Z},\quad \gamma(-h) = \gamma(h)$: elle est paire.
- $\gamma(0) = V(X_t)$ et $|\gamma(h)| \leq \gamma(0)\ \forall\ h$

La fonction d'auto-corrélation (FAC) est la version normalisée de la fonction d'auto-covariance et vérifie donc le même genre de propriétés.
La fonction $\rho(h)$ est l'expression du lien linéaire entre X_t et X_{t-h}.
Si t est l'instant présent et $h > 0$, $\rho(h)$ est l'expression du lien linéaire entre le présent et le passé d'ordre h ; plus $|\rho(h)|$ est proche de 1 et plus ce lien est fort.
La fonction $\rho(h)$ est comprise entre -1 et $1\ \forall\ h$.

FACP

Définition (FACP)

La fonction d'auto-corrélation partielle (FACP) d'un processus stationnaire X_t est définie par :

$$a(h) = Corr(X_t, X_{t-h} | X_{t-1}, ..., X_{t-h+1}), \; \forall\, h.$$

Calcul de la FACP

La FACP se calcule par :

$$a(h) = \frac{|\mathcal{R}^*(h)|}{|\mathcal{R}(h)|}$$

où $\mathcal{R}(h)$ est la matrice des auto-corrélations à l'ordre $h-1$ définie par :

$$\mathcal{R}(h) = \begin{pmatrix} \rho(0) & \rho(1) & \dots & \rho(h-1) \\ \rho(1) & \rho(0) & \dots & \rho(h-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho(h-1) & \rho(h-2) & \dots & \rho(0) \end{pmatrix}$$

et $\mathcal{R}^*(h)$ est la matrice obtenue après le remplacement de la dernière colonne de $\mathcal{R}(h)$ par $(\rho(1), \rho(2), \dots, \rho(h))^t$.

Moyenne,auto-covariance et auto-corrélation empiriques

La moyenne et la variance d'un processus X_t sont estimés respectivement par :

$$\overline{X} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} X_t \quad \text{et} \quad \sigma^2 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(X_t - \overline{X}\right)^2$$

Remarque : Dans la pratique, la variance est estimée par :

$$S^2 = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}\left(X_t - \overline{X}\right)^2.$$

Cet estimateur est un estimateur non biaisé de $V(X)$.

Moyenne,auto-covariance et auto-corrélation empiriques

La fonction d'auto-covariance est estimée par :

$$\widehat{\gamma}(h) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T-|h|}\left(X_t - \overline{X}\right)\left(X_{t-|h|} - \overline{X}\right)$$

Propriétés :

- $\widehat{\gamma}(h)$ est un estimateur **biaisé** de $\gamma(h)$.
- Sous certaines conditions, on peut montrer que $\widehat{\gamma}(h)$ est asymptotiquement **non biaisé**.
- Si X_t est un processus stationnaire gaussien et si la série de terme général $\gamma(h)$ est absolument convergente, alors $\widehat{\gamma}(h)$ converge en moyenne quadratique vers $\gamma(h)$.

Moyenne,auto-covariance et auto-corrélation empiriques

On estime la fonction d'auto-corrélation à partir de l'auto-covariance empirique de la façon suivante :

$$\widehat{\rho}(h) = \frac{\widehat{\gamma}(h)}{\widehat{\gamma}(0)} = \frac{\sum_{t=1}^{T-|h|} (X_t - \overline{X}) (X_{t-|h|} - \overline{X})}{\sum_{t=1}^{T-|h|} (X_t - \overline{X})^2}$$

Propriétés :

- $\forall\, h \in \mathbb{Z}, -1 \leq \widehat{\rho}(h) \leq 1$.
- Sous certaines conditions, on démontre un TCL qui précise le comportement asymptotique de $\widehat{\rho}(h)$.

Enfin, on obtient un estimateur $\widehat{a}(h)$ de $a(h)$ en remplaçant dans l'expression de $a(h)$ vue précédemment, $\rho(h)$ par $\widehat{\rho}(h)$.

Définition (Processus ARMA(p,q))

Un processus linéaire X_t est dit ARMA(p,q), $p \geq 0$, $q \geq 0$ s'il existe des constantes $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_p$ et $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_q$ et un processus $\epsilon_t \sim BB(0, \sigma^2)$ tel que :

$$\underbrace{X_t - \sum_{k=1}^{p} \phi_k X_{t-k}}_{\text{Partie Autoregressive}} = m + \underbrace{\epsilon_t + \sum_{j=1}^{q} \theta_k \epsilon_{t-j}}_{\text{Partie moyenne mobile}}$$

Ce processus peut être écrit comme suit :

$$\Phi(L) X_t = m + \Theta(L) \epsilon_t$$

où $\Phi(L) = 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \ldots - \phi_p L^p$ et $\Theta(L) = 1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \ldots + \theta_q L^q$ où L est l'opérateur retard.

Processus AR(p) et MA(q)

Il existe deux classes particuliers du processus ARMA(p,q) ; AR(p) et MA(q).

Définition (AR(p))

Un processus X_t est dit AR(p) s'il existe un polynôme de retards $\Phi(L)$ d'ordre p et un processus $\epsilon_t \sim BB(0,\sigma^2)$ tel que :

$$\Phi(L)X_t = m + \epsilon_t, \ \forall\, t$$

Définition (MA(q))

Un processus X_t est dit MA(q) s'il existe un polynôme de retards $\Theta(L)$ d'ordre q et un processus $\epsilon_t \sim BB(0,\sigma^2)$ tel que :

$$X_t = m + \Theta(L)\epsilon_t, \ \forall\, t$$

ARMA ajusté

Définition

Soit la spécification ARMA(p,q). Le processus ajusté ou centré est définie par :

$$\Phi(L)\widetilde{X}_t = \Theta(L)\epsilon_t \quad \text{où}$$

$$\widetilde{X}_t = X_t - \frac{m}{1-\sum_{i=1}^{i=p}\phi_i} = X_t - \Phi(1)^{-1}m$$

Stationnarité, causalité et inversibilité

Les conditions de stabilité et stationnarité concerne la partie AR du modèle ARMA.
Condition de stabilité $\Rightarrow$ condition de stationnarité.
Les conditions d'inversibilité concerne la partie MA du modèle ARMA.

Un processus ARMA(p, q) est stationnaire si les racines du polynôme caractéristique associé $\Phi(Z) = 0$ admet des racines en dehors du cercle unité en module. $(|Z_i| > 1)$
Un processus ARMA(p, q) est causal si et seulement si $\forall\, Z \in \mathbb{C}\, |Z| \leq 1 \Rightarrow \Phi(Z) \neq 0$.
Un processus ARMA(p, q) est inversible si les racines du polynôme caractéristique associé $\Theta(Z) = 0$ admet des racines en dehors du cercle unité en module. $(|Z_i| > 1)$

Théorème : Soit X_t un processus ARMA(p,q) stationnaire et inversible. Alors il existe deux séquences des nombres réels $(a_k)_{k\geq 0}$ et $(b_k)_{k\geq 0}$ telles que :

$$X_t = E(X_t) + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \epsilon_{t-k} \quad \text{(représentation MA}(\infty)\text{) et}$$

$$\epsilon_t = m_X^* + \sum_{k=0}^{\infty} b_k X_{t-k} \quad \text{(représentation AR}(\infty)\text{)}$$

où $E(X_t) = \Phi^{-1}(1)m$ et $m_X^* = -\Theta^{-1}(1)m$, $a_0 = 1$, $b_0 = 1$, a_k est le $k$ieme coefficients du polynôme des retards $\Psi(L) = \Phi^{-1}(L)\Theta(L)$, b_k le $k$ieme coefficients du polynôme des retards $\Pi(L) = \Phi(L)\Theta^{-1}(L)$ avec

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < +\infty \qquad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{\infty} |b_k| < +\infty$$

Calcul des a_j et b_j

Les coefficients a_j et b_j se calculent par les relations suivantes :

$$a_j = \phi_1 a_{j-1} + \phi_2 a_{j-2} + \ldots + \phi_p a_{j-p} + \theta_j, \quad j > 0.$$

Avec $a_0 = 1$, $a_j = 0$, pour $j < 0$ et $\theta_j = 0$ pour $j > q$.

$$b_j = \theta_1 b_{j-1} + \theta_1 b_{j-1} + \ldots + \theta_q b_{j-q} + \phi_j, \quad j > 0.$$

Avec $b_0 = 1$, $b_j = 0$, pour $j < 0$ et $\phi_j = 0$ pour $j > p$.

Exemple ARMA(1,1)

Soit $X_t - \phi X_{t-1} = \epsilon_t + \theta\epsilon_{t-1}$ où $\epsilon_t \sim BB(0, \sigma^2)$.
1) À quelle conditions sur ϕ et θ pour que X_t existe et soit stationnaire ?
2) A quelles conditions ce processus est causale ? inversible ?
3) On suppose que tous les conditions de stationnarité et d'inversibilité sont vérifiées.
Donner une représentation MA(∞) de X_t.

Les caractéristiques d'un processus AR(p)

Espérance

$$E(X_t) = \frac{m}{\Phi(1)} = \frac{m}{1 - \sum_{i=1}^{p} \phi_i}$$

Fonction d'auto-covariance :

$$\gamma(h) = \phi_1\gamma(h-1) + \phi_2\gamma(h-2) + \ldots + \phi_p\gamma(h-p) \quad h > 0 \text{ avec}$$

$$\gamma(0) = \phi_1\gamma(1) + \phi_2\gamma(2) + \ldots + \phi_p\gamma(p) + \sigma^2$$

Fonction d'auto-corrélation

$$\rho(h) = \phi_1\rho(h-1) + \phi_2\rho(h-2) + \ldots + \phi_p\rho(h-p) \quad h > 0.$$

Les caractéristiques d'un processus MA(q)

Espérance et variance

$$E(X_t) = m, \;\; \gamma(0) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{q} \theta_j^2, \quad \theta_0 = 1.$$

Fonction d'auto-covariance :

$$\gamma(h) = \begin{cases} \sigma^2 \sum_{j=0}^{q-h} \theta_j \theta_{j+h}, & h \leq q; \\ 0, & h > q. \end{cases}$$

où $\theta_0 = 1$, $\theta_j = 0$ pour tout $j > q$

Fonction d'auto-corrélation

$$\rho(h) = \begin{cases} 1, & h = 0; \\ \frac{\sum_{j=0}^{q-h} \theta_j \theta_{j+h}}{\sum_{j=0}^{q} \theta_j^2}, & 1 \leq h \leq q : \\ 0, & h > q \end{cases}$$

Les caractéristiques d'un processus ARMA(p, q)

Espérance

$$E(X_t) = \frac{m}{\Phi(1)} = \frac{m}{1 - \sum_{i=1}^{p} \phi_i}$$

Fonction d'auto-covariance

$$\gamma(h) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} a_j a_{j+h} \text{ où } a_j \text{ sont les coefficients de la}$$

représentation MA(∞) avec $a_0 = 1$ et $h \geq 0$.

Fonction d'auto-corrélation

$$\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} = \frac{\sum_{j=0}^{\infty} a_j a_{j+h}}{\sum_{j=0}^{\infty} a_j^2}$$