Chapitre 2: Analyse en Composante Principale

Mohamed Essaied Hamrita

ISMAI, Université Kairouan. Tunisie
mhamrita@gmail.com
http://hamrita.e-monsite.com/

Février 2014

Plan du chapitre

Motivation

- Représenter en 2 ou 3 dimensions l'observation de $p \geq 3$ variables.

Motivation

- Représenter en 2 ou 3 dimensions l'observation de $p \geq 3$ variables.
- Réduire la dimension de manière pertinente: La réduction de variables fait perdre de l'information.

Motivation

- Représenter en 2 ou 3 dimensions l'observation de $p \geq 3$ variables.
- Réduire la dimension de manière pertinente: La réduction de variables fait perdre de l'information.

Motivation

- Représenter en 2 ou 3 dimensions l'observation de $p \geq 3$ variables.
- Réduire la dimension de manière pertinente: La réduction de variables fait perdre de l'information.
  Comment conserver l'information essentielle du jeu de données?
- Solution: Trouver un espace de dimension réduite dur lequel on projete les observations.

Motivation

Question: Sur quel espace projeter?

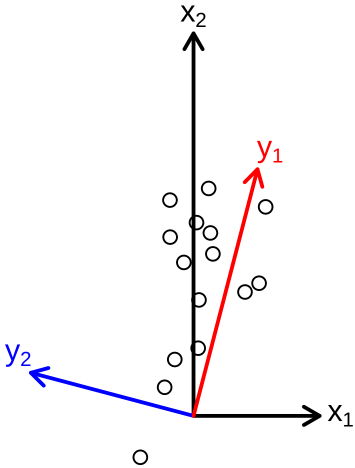
Motivation

Question: Sur quel espace projeter?

Projeter sur un espace avec une variabilté (information) maximale.

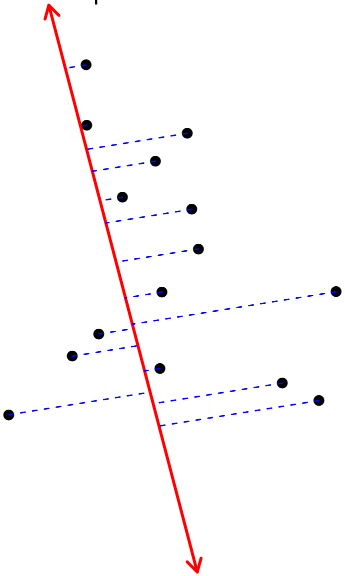
Motivation

y_1 est la première composante principale possédant la plus grande valeur de la variance.
y_2 est la deuxième composante principale perpendiculaire à la première.



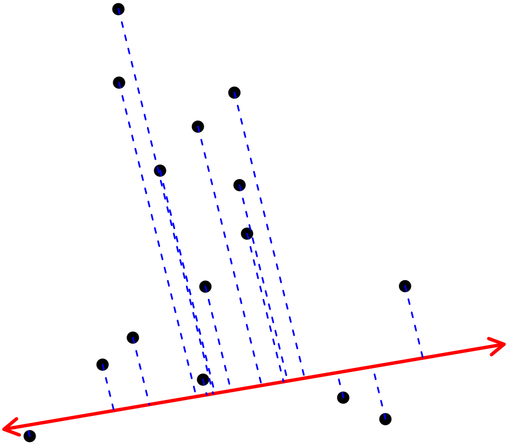
Motivation

Les projections sur le premier axe:



Motivation

Les projections sur le deuxième axe:



Notations

Un tableau de données de n lignes (individus) et p colonnes (variables) est:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{np} \end{pmatrix} ; \ \mathbf{x}_i = \begin{pmatrix} x_{i1} & x_{i2} & \cdots & x_{ip} \end{pmatrix} ; \ \mathbf{x}^j = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ x2j \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix}$$

$\mathbf{x}_i$ et $\mathbf{x}^j$ représentent respectivement, l'individu de la ligne i et la variable de la colonne j.

Notations

Un tableau de données de n lignes (individus) et p colonnes (variables) est:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{np} \end{pmatrix} ; \; \mathbf{x}_i = \begin{pmatrix} x_{i1} & x_{i2} & \cdots & x_{ip} \end{pmatrix} ; \; \mathbf{x}^j = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ x2j \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix}$$

$\mathbf{x}_i$ et $\mathbf{x}^j$ représentent respectivement, l'individu de la ligne i et la variable de la colonne j.

Distances entre les individus: la distance la plus simple entre deux points de $\mathbb{R}^p$ est la distance euclidienne qui est définie par:

$$d^2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{j=1}^{p} (u_j - v_j)^2 = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$$

Exemple

Déterminer la distance euclidienne entre ces deux vecteurs:

$$x = (2, 1, -2, 4); \quad y = (-1, 2, 0, 1)$$

Exemple

Déterminer la distance euclidienne entre ces deux vecteurs:

$$x = (2, 1, -2, 4); \quad y = (-1, 2, 0, 1)$$

```
x <- c(2, 1, -2, 4)
y <- c(-1, 2, 0, 1)
dist(cbind(x, y))

##       1     2     3
## 2 3.162
## 3 4.123 3.606
## 4 2.828 3.162 6.083

sqrt(sum((x - y)^2))

## [1] 4.796
```

Différence entre ACP et ACP réduite

Métriques usuelles: On donne deux types de métriques usuelles:

- Métrique usuelle i.e $M = I$: Dans ce cas, la distance dépend de l'unité de mesure, et de la dispersion des variables.

Différence entre ACP et ACP réduite

Métriques usuelles: On donne deux types de métriques usuelles:

- Métrique usuelle i.e $M = I$: Dans ce cas, la distance dépend de l'unité de mesure, et de la dispersion des variables.
- Métrique réduite: $M = diag(s_1^{-2}, \ldots, s_p^{-2})$, la matrice diagonale des inverses des variances empiriques.

Différence entre ACP et ACP réduite

Métriques usuelles: On donne deux types de métriques usuelles:

- Métrique usuelle i.e $M = I$: Dans ce cas, la distance dépend de l'unité de mesure, et de la dispersion des variables.
- Métrique réduite: $M = diag(s_1^{-2}, \dots, s_p^{-2})$, la matrice diagonale des inverses des variances empiriques.

Différence entre ACP et ACP réduite

Métriques usuelles: On donne deux types de métriques usuelles:

- Métrique usuelle i.e $M = I$: Dans ce cas, la distance dépend de l'unité de mesure, et de la dispersion des variables.
- Métrique réduite: $M = diag(s_1^{-2}, \ldots, s_p^{-2})$, la matrice diagonale des inverses des variances empiriques.

ACP ou ACP réduite?

Différence entre ACP et ACP réduite

Métriques usuelles: On donne deux types de métriques usuelles:

- Métrique usuelle i.e $M = I$: Dans ce cas, la distance dépend de l'unité de mesure, et de la dispersion des variables.
- Métrique réduite: $M = diag(s_1^{-2}, \ldots, s_p^{-2})$, la matrice diagonale des inverses des variances empiriques.

ACP ou ACP réduite?

Inconvénient de l'utilisation de Cov(X): une variable à forte variance va être sur-importante dans les résultats de l'ACP ;

Différence entre ACP et ACP réduite

Métriques usuelles: On donne deux types de métriques usuelles:

- Métrique usuelle i.e $M = I$: Dans ce cas, la distance dépend de l'unité de mesure, et de la dispersion des variables.
- Métrique réduite: $M = diag(s_1^{-2}, \ldots, s_p^{-2})$, la matrice diagonale des inverses des variances empiriques.

ACP ou ACP réduite?

Inconvénient de l'utilisation de Cov(X): une variable à forte variance va être sur-importante dans les résultats de l'ACP ;

Inconvénient de l'utilisation de Cor(X): peut amplifier les variations d'une variable de faible importance.

Différence entre ACP et ACP réduite

Métriques usuelles: On donne deux types de métriques usuelles:

- Métrique usuelle i.e $M = I$: Dans ce cas, la distance dépend de l'unité de mesure, et de la dispersion des variables.
- Métrique réduite: $M = diag(s_1^{-2}, \ldots, s_p^{-2})$, la matrice diagonale des inverses des variances empiriques.

ACP ou ACP réduite?

Inconvénient de l'utilisation de Cov(X): une variable à forte variance va être sur-importante dans les résultats de l'ACP ;

Inconvénient de l'utilisation de Cor(X): peut amplifier les variations d'une variable de faible importance.

En pratique : Utiliser Cor(X) lorsque les variables n'ont pas les mêmes ordres de grandeurs (unités différentes, par exemple).

l'ACP est un problème d'optimisation

La première composante principale des observations, notée y_1, est la combinaison linéaire:

$$y_1 = \mathbf{X}\mathbf{a}_1 = a_{11}\mathbf{x}^1 + a_{12}\mathbf{x}^2 + \ldots + a_{1p}\mathbf{x}^p$$

possédante la plus grande variance empirique de toutes les combinaisons linéaires possibles.
Puisque la variance de y_1 croît infiniment lorsqu'on fait croître les valeurs de $\mathbf{a}_1$, on doit placer la contrainte $\sum a_{1j}^2 = \mathbf{a'}_1\mathbf{a}_1 = 1$.
Donc, la première composante principale est solution du programme suivant:

$$\begin{cases} \max_{\mathbf{a}_1} Var(y_1) = \mathbf{a'}_1 V \mathbf{a}_1, \quad V \text{ est la variance de } \mathbf{X} \\ \text{s/c } \mathbf{a'}_1\mathbf{a}_1 = 1. \end{cases}$$

La $j^{\text{ième}}$ composante principale y_j est la combinaison linéaire $y_j = \mathbf{X}\mathbf{a}_j$ qui maximise la variance sous contraintes:

$$\mathbf{a'}_j\mathbf{a}_j = 1; \quad \mathbf{a'}_j\mathbf{a}_i = 1 \;\; (i < j).$$

La deuxième contrainte pour assurer l'orthogonalité de y_i et y_j.

Solution du problème

Pour déterminer la première composante principale, on utilise la technique de Lagrange. Le lagrangien s'écrit alors:

$$\mathcal{L}(\mathbf{a}_1) = \mathbf{a'}_1 V \mathbf{a}_1 - \lambda(\mathbf{a'}_1 \mathbf{a}_1 - 1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{a}_1} = 2V\mathbf{a}_1 - 2\lambda \mathbf{a}_1 = 0 \Longrightarrow (V - \lambda I_p)\mathbf{a}_1 = 0.$$

Ceci montre que $\mathbf{a}_1$ doit être choisi comme vecteur propre de V corresondant à la valeur propre λ.
Or, $Var(y_1) = \mathbf{a'}_1 V \mathbf{a}_1 = \lambda \mathbf{a'}_1 \mathbf{a}_1 = \lambda$. $Var(y_1)$ est maximum $\Longleftrightarrow \lambda$ est maximum.
D'où, $\mathbf{a}_1$ est le vecteur propre de V correspondant à la plus grande valeur propre.

Résumé de la méthode

Considérons le tableau de données $X = (x_{ij})_{i=1,\ldots,n;j=1,\ldots,p}$. L'espace des individus est muni par la métrique M ($M = I$ pour ACP non réduite et $M = diag(s_1^{-2}, \ldots, s_p^{-2})$ pour ACP réduite).

- On diagonalise $VM = (XM^{1/2})'(XM^{1/2})$.

Résumé de la méthode

Considérons le tableau de données $X = (x_{ij})_{i=1,\ldots,n;j=1,\ldots,p}$. L'espace des individus est muni par la métrique M ($M = I$ pour ACP non réduite et $M = diag(s_1^{-2}, \ldots, s_p^{-2})$ pour ACP réduite).

- On diagonalise $VM = (XM^{1/2})'(XM^{1/2})$.
- Soient $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_p$ les valeurs propres et $\mathbf{u}_j$ les vecteurs propres. Les axes principaux sont définis, alors: $\mathbf{a}_j = M^{-1/2}\mathbf{u}_j$.

Résumé de la méthode

Considérons le tableau de données $X = (x_{ij})_{i=1,\dots,n; j=1,\dots,p}$. L'espace des individus est muni par la métrique M ($M = I$ pour ACP non réduite et $M = diag(s_1^{-2}, \dots, s_p^{-2})$ pour ACP réduite).

- On diagonalise $VM = (XM^{1/2})'(XM^{1/2})$.
- Soient $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_p$ les valeurs propres et $\mathbf{u}_j$ les vecteurs propres. Les axes principaux sont définis, alors: $\mathbf{a}_j = M^{-1/2}\mathbf{u}_j$.
- Les coordonnées des individus centré $\overline{x}_i$ sont données par:

$$c_{ij} = \overline{x}_i M \mathbf{a}_j$$

Résumé de la méthode

Considérons le tableau de données $X = (x_{ij})_{i=1,\ldots,n; j=1,\ldots,p}$. L'espace des individus est muni par la métrique M ($M = I$ pour ACP non réduite et $M = diag(s_1^{-2}, \ldots, s_p^{-2})$ pour ACP réduite).

- On diagonalise $VM = (XM^{1/2})'(XM^{1/2})$.
- Soient $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_p$ les valeurs propres et $\mathbf{u}_j$ les vecteurs propres. Les axes principaux sont définis, alors: $\mathbf{a}_j = M^{-1/2}\mathbf{u}_j$.
- Les coordonnées des individus centré $\overline{x}_i$ sont données par:

$$c_{ij} = \overline{x}_i M \mathbf{a}_j$$

- Le même travail se repète pour les variables.

Combien d'axes à retenir?

on veut garder peu d'axes principaux, avec

- un soucis d'interprétation: on ne garde que des axes que l'on puisse interpréter,

Combien d'axes à retenir?

on veut garder peu d'axes principaux, avec

- un soucis d'interprétation: on ne garde que des axes que l'on puisse interpréter,
- des axes qui expliquent suffisement d'inertie. Pour cela, on a deux méthodes

Combien d'axes à retenir?

on veut garder peu d'axes principaux, avec

- un soucis d'interprétation: on ne garde que des axes que l'on puisse interpréter,
- des axes qui expliquent suffisement d'inertie. Pour cela, on a deux méthodes
  - la méthode du coude, correspondant à un décrochage au niveau des valeurs propres.

Combien d'axes à retenir?

on veut garder peu d'axes principaux, avec

- un soucis d'interprétation: on ne garde que des axes que l'on puisse interpréter,
- des axes qui expliquent suffisement d'inertie. Pour cela, on a deux méthodes
  - la méthode du coude, correspondant à un décrochage au niveau des valeurs propres.
  - la règle de Kaiser, pour les variables centrées réduites (ACP réduite): on ne garde que les valeurs propres supèrieures à 1.

Interprétation des individus

- On appelle pourcentage d'inertie reproduite en dimension k la quantité: $\frac{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i}{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i} \times 100$. Généralement, on choisit ce pourcentage supérieur à 80 %.

Interprétation des individus

- On appelle pourcentage d'inertie reproduite en dimension k la quantité: $\frac{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i}{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i} \times 100$. Généralement, on choisit ce pourcentage supérieur à 80 %.
- Les coordonnées des individus: appelées aussi scores en anglais sont les projections des observations sur le nouveau espace engendré par les vecteurs propres. Ainsi, l'individu x_i est représenté sur l'axe $\mathbf{a}^j$ par la coordonnée:$c_{ij} = x_i^c M\mathbf{a}^j$. $c^1, c^2, \ldots, c^p$ sont appelées composantes principales.

Interprétation des individus

- On appelle pourcentage d'inertie reproduite en dimension k la quantité: $\frac{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i}{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i} \times 100$. Généralement, on choisit ce pourcentage supérieur à 80 %.
- Les coordonnées des individus: appelées aussi scores en anglais sont les projections des observations sur le nouveau espace engendré par les vecteurs propres. Ainsi, l'individu x_i est représenté sur l'axe $\mathbf{a}^j$ par la coordonnée:$c_{ij} = x_i^c M \mathbf{a}^j$. $c^1, c^2, \ldots, c^p$ sont appelées composantes principales.
- Contribution des individus: La contribution relative d'un individu i à la formation de la composante principale k est définie par:

$$CTR_{ij} = \frac{c_{ij}^2}{n \times \lambda_j}$$

Interprétation des individus

- On appelle pourcentage d'inertie reproduite en dimension k la quantité: $\frac{\sum_{i=1}^{k}\lambda_i}{\sum_{i=1}^{p}\lambda_i} \times 100$. Généralement, on choisit ce pourcentage supérieur à 80 %.
- Les coordonnées des individus: appelées aussi scores en anglais sont les projections des observations sur le nouveau espace engendré par les vecteurs propres. Ainsi, l'individu x_i est représenté sur l'axe $\mathbf{a}^j$ par la coordonnée:$c_{ij} = x_i^c M\mathbf{a}^j$. $c^1, c^2, \ldots, c^p$ sont appelées composantes principales.
- Contribution des individus: La contribution relative d'un individu i à la formation de la composante principale k est définie par:

$$CTR_{ij} = \frac{c_{ij}^2}{n \times \lambda_j}$$

- Qualité de la représentation des individus ou $\cos^2$: La qualité de la représentation d'un individu par la composante principale k est définie par: $Qlt_{ik} = \frac{c_{ij}^2}{\sum_{k=1}^{p} c_{ik}^2}$.

Interprétations des variables

- On appelle axes factoriels les vecteurs $U^1, U^2, \ldots, U^k$ définis par:
  $U^j = \dfrac{c^j}{\sqrt{\lambda_j}}$.

Interprétations des variables

- On appelle axes factoriels les vecteurs $U^1, U^2, \dots, U^k$ définis par:
  $U^j = \dfrac{c^j}{\sqrt{\lambda_j}}$.
- Les coordonnées des variables sont les covariances entres les observations centrées et les axes factoriels.
  $F_{jk} = cov(\widetilde{x}^j, U^k) = \sqrt{\lambda_k} a_{jk}$.
  Les projections des variables centrées réduites appartiennent aux disque de centre 0 et de rayon 1 et leur représentation est d'autant meilleure que le projeté est proche du cercle.

Interprétations des variables

- On appelle axes factoriels les vecteurs $U^1, U^2, \ldots, U^k$ définis par: $U^j = \dfrac{c^j}{\sqrt{\lambda_j}}$.
- Les coordonnées des variables sont les covariances entres les observations centrées et les axes factoriels.
  $F_{jk} = cov(\widetilde{x}^j, U^k) = \sqrt{\lambda_k} a_{jk}$.
  Les projections des variables centrées réduites appartiennent aux disque de centre 0 et de rayon 1 et leur représentation est d'autant meilleure que le projeté est proche du cercle.
- La coordonnée de la projection de la variable x^j sur l'axe U^k est: $\dfrac{\sqrt{\lambda_k} a_{jk}}{\sigma^j}$.

Critères de qualités

- Contribution des variables: La contribution de la variable x^j à la formation de l'axe factoriel U^k est:

$$Ctr_{jk} = \frac{F_{jk}^2}{\lambda_k}$$

Critères de qualités

- Contribution des variables: La contribution de la variable x^j à la formation de l'axe factoriel U^k est:

$$Ctr_{jk} = \frac{F_{jk}^2}{\lambda_k}$$

- Qualité de la représentation de la variable x^j sur l'axe factoriel U^k est:

$$Qlt_{jk} = \frac{F_{jk}^2}{\sum_{l=1}^{p} F_j l^2}$$

C'est le cosinus carré de l'angle entre la représentation de la variable x^j est sa projection sur l'axe U^k.

Critères de qualités

- Contribution des variables: La contribution de la variable x^j à la formation de l'axe factoriel U^k est:

$$Ctr_{jk} = \frac{F_{jk}^2}{\lambda_k}$$

- Qualité de la représentation de la variable x^j sur l'axe factoriel U^k est:

$$Qlt_{jk} = \frac{F_{jk}^2}{\sum_{l=1}^{p} F_j l^2}$$

C'est le cosinus carré de l'angle entre la représentation de la variable x^j est sa projection sur l'axe U^k.

Reprenons l'exemple des notes du chapitre précédent.

```
##          Maths Physique Français Anglais
## Fatma     6.0      6.0      5.0     5.5
## Ali       8.0      8.0      8.0     8.0
## Kawther   6.0      7.0     11.0     9.5
## Nidhal   14.5     14.5     15.5    15.0
## Nabiha   14.0     14.0     12.0    12.5
## Wiem     11.0     10.0      5.5     7.0
## Youssef   5.5      7.0     14.0    11.5
## Sarah    13.0     12.5      8.5     9.5
## Wafa      9.0      9.5     12.5    12.0
```

On propose d'étudier ce tableau de données par la méthode de l'ACP.

ACP normée

Tout d'abord, déterminons la matrice des corrélations.

ACP normée

Tout d'abord, déterminons la matrice des corrélations.

```
(S <- cor(notes))

##           Maths Physique Français Anglais
## Maths    1.0000   0.9825   0.2267  0.5081
## Physique 0.9825   1.0000   0.3967  0.6515
## Français 0.2267   0.3967   1.0000  0.9512
## Anglais  0.5081   0.6515   0.9512  1.0000
```

puis calculons les valeurs et les vecteurs propres de la matrice des corrélations.

ACP normée

Tout d'abord, déterminons la matrice des corrélations.

```
(S <- cor(notes))

##          Maths Physique Français Anglais
## Maths    1.0000   0.9825   0.2267  0.5081
## Physique 0.9825   1.0000   0.3967  0.6515
## Français 0.2267   0.3967   1.0000  0.9512
## Anglais  0.5081   0.6515   0.9512  1.0000
```

puis calculons les valeurs et les vecteurs propres de la matrice des corrélations.

```
(lambda <- eigen(S)$values)

## [1] 2.875687 1.119687 0.003578 0.001048

(a <- eigen(S)$vectors)

##         [,1]    [,2]    [,3]    [,4]
## [1,] -0.4785  0.5519  0.2026  0.6522
## [2,] -0.5319  0.4068 -0.4412 -0.5974
## [3,] -0.4439 -0.6212 -0.5324  0.3654
## [4,] -0.5395 -0.3794  0.6934 -0.2901
```

Combiens de composantes principales à retenir?

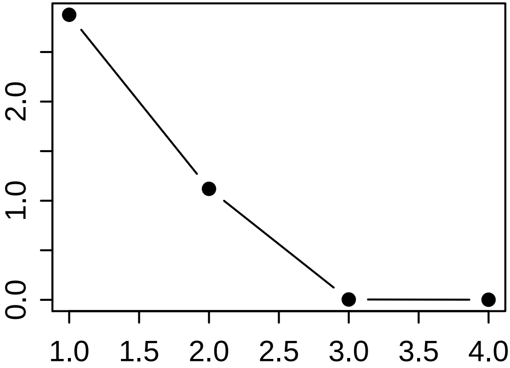
Combiens de composantes principales à retenir?

Suivant le critère de Kaiser, on doit retenir deux composnates puisqu'on a deux valeurs propres supèrieurs à 1 (ACP normée).

Combiens de composantes principales à retenir?

Suivant le critère de Kaiser, on doit retenir deux composnates puisqu'on a deux valeurs propres supèrieurs à 1 (ACP normée).
Selon la méthode de coude:

```
plot(lambda, type = "b", pch = 16, xlab = "", ylab = "")
```



Selon la courbe, on observe une coude au point d'abcisse 3, cela veut dire que celle-ci est peu importante de la précédente. Donc on retient 2 composantes principales.

Selon la courbe, on observe une coude au point d'abcisse 3, cela veut dire que celle-ci est peu importante de la précédente. Donc on retient 2 composantes principales.
Les deux premières composantes principales, forment $(\lambda_1 + \lambda_2)/\sum \lambda_j = 99.88$% de l'inertie (l'information) totale.

Selon la courbe, on observe une coude au point d'abcisse 3, cela veut dire que celle-ci est peu importante de la précédente. Donc on retient 2 composantes principales.

Les deux premières composantes principales, forment $(\lambda_1 + \lambda_2)/\sum \lambda_j = 99.88\%$ de l'inertie (l'information) totale.

En conclusion, on retient deux composantes principales.

Coordonnées

Coordonnées de la projection des individus:

Coordonnées

Coordonnées de la projection des individus:

```
(Cij <- scale(notes) %*% a)

##               [,1]    [,2]      [,3]      [,4]
## Fatma     2.5860  0.4030  0.021712 -0.021324
## Ali       1.1697  0.1440  0.004136  0.020986
## Kawther   0.9719 -0.9893 -0.054956 -0.003333
## Nidhal   -2.9587 -0.1750  0.010757  0.044664
## Nabiha   -1.9341  0.5919 -0.023141 -0.056429
## Wiem      0.9154  1.4119  0.024670  0.040175
## Youssef   0.3156 -1.8266 -0.052044  0.008723
## Sarah    -0.5847  1.2171 -0.062450 -0.011683
## Wafa     -0.4811 -0.7769  0.131315 -0.021779
```

Contributions des individus selon les composantes principales

```
(ctrI <- Cij^2 %*% diag(1/lambda)/nrow(notes))

##              [,1]     [,2]      [,3]     [,4]
## Fatma   0.258381 0.016113 0.0146409 0.048196
## Ali     0.052863 0.002058 0.0005312 0.046682
## Kawther 0.036500 0.097118 0.0937996 0.001177
## Nidhal  0.338224 0.003039 0.0035939 0.211443
## Nabiha  0.144542 0.034768 0.0166309 0.337508
## Wiem    0.032378 0.197810 0.0189017 0.171075
## Youssef 0.003848 0.331096 0.0841209 0.008065
## Sarah   0.013210 0.146989 0.1211229 0.014467
## Wafa    0.008942 0.059898 0.5355469 0.050277
```

Contributions des individus selon les composantes principales

```
(ctrI <- Cij^2 %*% diag(1/lambda)/nrow(notes))

##              [,1]     [,2]      [,3]     [,4]
## Fatma   0.258381 0.016113 0.0146409 0.048196
## Ali     0.052863 0.002058 0.0005312 0.046682
## Kawther 0.036500 0.097118 0.0937996 0.001177
## Nidhal  0.338224 0.003039 0.0035939 0.211443
## Nabiha  0.144542 0.034768 0.0166309 0.337508
## Wiem    0.032378 0.197810 0.0189017 0.171075
## Youssef 0.003848 0.331096 0.0841209 0.008065
## Sarah   0.013210 0.146989 0.1211229 0.014467
## Wafa    0.008942 0.059898 0.5355469 0.050277
```

Par exemple, la contribution de l'individu 1 à la formation de la première composante est égale à:

$$Ctr_{11} = \frac{2.586^2}{9 \times \lambda_1} = \frac{2.586^2}{9 \times 2.875687} = 0.258381.$$

Qualités de la représentation des individus

Coordonnées de la projection des individus:

```
deno <- apply(Cij^2, 1, sum)
(qltI <- sweep(Cij^2, 1, deno, "/"))

##              [,1]     [,2]      [,3]      [,4]
## Fatma   0.97616 0.023702 6.881e-05 6.638e-05
## Ali     0.98474 0.014930 1.231e-05 3.170e-04
## Kawther 0.49039 0.508041 1.568e-03 5.767e-06
## Nidhal  0.99627 0.003486 1.317e-05 2.270e-04
## Nabiha  0.91353 0.085558 1.308e-04 7.776e-04
## Wiem    0.29573 0.703483 2.148e-04 5.696e-04
## Youssef 0.02896 0.970227 7.876e-04 2.213e-05
## Sarah   0.18711 0.810678 2.134e-03 7.470e-05
## Wafa    0.27140 0.707822 2.022e-02 5.562e-04
```

Par exemple, la qualité de la représentation de l'individu 1 par la première composante est égale à:

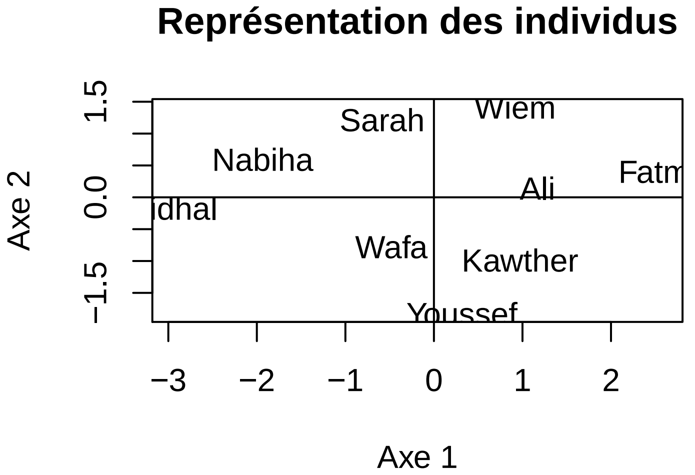
$$Ctr_{11} = \frac{2.5860^2}{2.5860^2 + 0.4030^2 + 0.021712^2 + (-0.021324)^2} = 0.976158.$$

Géométriquement, la qualité de la représentation d'un individu i par la composante j est égale à $\cos^2\theta$, où θ est l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{\mathbf{a}^j}}\right)$.

On peut faire la même chose pour les variables, c.à.d, on détermine les coordonnées, les contributions et les qualités de la représentation des variables sur les axes factoriels.

On peut faire la même chose pour les variables, c.à.d, on détermine les coordonnées, les contributions et les qualités de la représentation des variables sur les axes factoriels.
Tous ces calculs, peuvent être résumés dans deux graphiques (Individus et variables). Ces graphiques, sont données comme suit:

```r
plot(Cij[, 1:2], xlab = "Axe 1", ylab = "Axe 2", main = "Représentation des ind
    type = "n")
text(Cij[, 1], Cij[, 2], rnames)
```



Variables factor map (PCA)