Séries temporelles

Chapitre 1: Concepts des séries temporelles

Mohamed Essaied Hamrita

Institut Supèrieur de Mathématiques Appliqués & Informatique - Kairouan

Octobre 2013

M2: Ingénierie Financière

Plan du chapitre

Définitions

Définition

Un **processus stochastique** est une famille $\{X_t, \ t \in T\}$ de variables aléatoires définies sur un même espace de probabilité.

Définitions

Définition

Un **processus stochastique** est une famille $\{X_t, \ \ t \ \in \ T\}$ de variables aléatoires définies sur un même espace de probabilité.

- t représente le temps.

Définitions

Définition

Un **processus stochastique** est une famille $\{X_t, \ t \in T\}$ de variables aléatoires définies sur un même espace de probabilité.

- t représente le temps.
- Le processus est en temps continu si T est continu et en temps discret si T est discret.

Définitions

Définition

Un **processus stochastique** est une famille $\{X_t, \ t \in T\}$ de variables aléatoires définies sur un même espace de probabilité.

- t représente le temps.
- Le processus est en temps continu si T est continu et en temps discret si T est discret.

Définitions

Définition

Un **processus stochastique** est une famille $\{X_t, \ t \in T\}$ de variables aléatoires définies sur un même espace de probabilité.

- t représente le temps.
- Le processus est en temps continu si T est continu et en temps discret si T est discret.

Définition

Une **Série temporelle** $\{X_t\}_{t=1}^{T}$ est la partie de dimension finie d'une réalisation d'un processus stochastique.

Définitions

Une série temporelle est toute suite d'observations correspondants à la même variable. Il peut agir des données :

Définitions

Une série temporelle est toute suite d'observations correspondants à la même variable. Il peut agir des données :

- macro-économiques telles que le PIB, le taux d'inflation, le niveau des exportations, le taux de chômage, ...

Définitions

Une série temporelle est toute suite d'observations correspondants à la même variable. Il peut agir des données :

- macro-économiques telles que le PIB, le taux d'inflation, le niveau des exportations, le taux de chômage, ...
- micro-économiques : les ventes d'une entreprise, nombre d'employés, le revenu d'un individu, ...

Définitions

Une série temporelle est toute suite d'observations correspondants à la même variable. Il peut agir des données :

- macro-économiques telles que le PIB, le taux d'inflation, le niveau des exportations, le taux de chômage, ...
- micro-économiques : les ventes d'une entreprise, nombre d'employés, le revenu d'un individu, ...
- financières : le cours d'une action, le prix d'une option d'achat ou de vente, ...

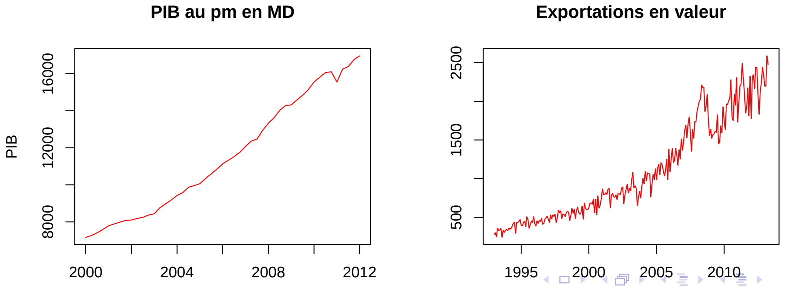
Définitions

Une série temporelle est toute suite d'observations correspondants à la même variable. Il peut agir des données :

- macro-économiques telles que le PIB, le taux d'inflation, le niveau des exportations, le taux de chômage, ...
- micro-économiques : les ventes d'une entreprise, nombre d'employés, le revenu d'un individu, ...
- financières : le cours d'une action, le prix d'une option d'achat ou de vente, ...
- politiques telles que le nombre de votants dans une élection, ...

Exemples

```
pib <- read.table("http://hamrita.e-monsite.com/medias/files/tunpib.txt", skip = 2)
export <- read.table("http://hamrita.e-monsite.com/medias/files/exportation.txt",
    skip = 2)
pib <- ts(pib, start = 2000, freq = 4)
Export <- ts(export, star = c(1993, 1), freq = 12)
par(mfrow = c(1, 2))
plot(pib, ylab = "PIB", main = "PIB au pm en MD", col = "red")
plot(Export, ylab = "", main = "Exportations en valeur", col = "red")
```



Objectifs principaux

Objectifs principaux

L'objectif principal de l'analyse d'une série temporelle est de résoudre quelques problèmes tels que :

Objectifs principaux

L'objectif principal de l'analyse d'une série temporelle est de résoudre quelques problèmes tels que :

- La prévision : prévoir les valeurs futures de la séries.

Objectifs principaux

L'objectif principal de l'analyse d'une série temporelle est de résoudre quelques problèmes tels que :

- La prévision : prévoir les valeurs futures de la séries.
- La détection des ruptures qui peuvent être résultantes, par exemple, d'un changement de politique.

Objectifs principaux

L'objectif principal de l'analyse d'une série temporelle est de résoudre quelques problèmes tels que :

- La prévision : prévoir les valeurs futures de la séries.
- La détection des ruptures qui peuvent être résultantes, par exemple, d'un changement de politique.
- Repérer les tendances (Trend) et les effets saisonnières.

Objectifs principaux

L'objectif principal de l'analyse d'une série temporelle est de résoudre quelques problèmes tels que :

- La prévision : prévoir les valeurs futures de la séries.
- La détection des ruptures qui peuvent être résultantes, par exemple, d'un changement de politique.
- Repérer les tendances (Trend) et les effets saisonnières.
- La détermination de la causalité.

Stationnarité-Définitions

Définition (stationnarité faible)

Un processus stochastique X_t est faiblement stationnaire (ou stationnaire de second ordre) si :

Stationnarité-Définitions

Définition (stationnarité faible)

Un processus stochastique X_t est faiblement stationnaire (ou stationnaire de second ordre) si :

- $E(X_t) = m$ indépendant du temps,

Stationnarité-Définitions

Définition (stationnarité faible)

Un processus stochastique X_t est faiblement stationnaire (ou stationnaire de second ordre) si :

- $E(X_t) = m$ indépendant du temps,
- $V(X_t) < \infty$, et indépendant du temps,

Stationnarité-Définitions

Définition (stationnarité faible)

Un processus stochastique X_t est faiblement stationnaire (ou stationnaire de second ordre) si :

- $E(X_t) = m$ indépendant du temps,
- $V(X_t) < \infty$, et indépendant du temps,
- $Cov(X_t, X_{t-h}) = E[(X_t - m)(X_{t-h} - m)] = \gamma_h$, est indépendant du temps.

Stationnarité-Définitions

Définition (stationnarité faible)

Un processus stochastique X_t est faiblement stationnaire (ou stationnaire de second ordre) si :

- $E(X_t) = m$ indépendant du temps,
- $V(X_t) < \infty$, et indépendant du temps,
- $Cov(X_t, X_{t-h}) = E\left[(X_t - m)(X_{t-h} - m)\right] = \gamma_h$, est indépendant du temps.

Stationnarité-Définitions

Définition (stationnarité faible)

Un processus stochastique X_t est faiblement stationnaire (ou stationnaire de second ordre) si :

- $E(X_t) = m$ indépendant du temps,
- $V(X_t) < \infty$, et indépendant du temps,
- $Cov(X_t, X_{t-h}) = E[(X_t - m)(X_{t-h} - m)] = \gamma_h$, est indépendant du temps.

Stationnarité-Définitions

Définition (stationnarité faible)

Un processus stochastique X_t est faiblement stationnaire (ou stationnaire de second ordre) si :

- $E(X_t) = m$ indépendant du temps,
- $V(X_t) < \infty$, et indépendant du temps,
- $Cov(X_t, X_{t-h}) = E\left[(X_t - m)(X_{t-h} - m)\right] = \gamma_h$, est indépendant du temps.

Remarques :

Stationnarité-Définitions

Définition (stationnarité faible)

Un processus stochastique X_t est faiblement stationnaire (ou stationnaire de second ordre) si :

- $E(X_t) = m$ indépendant du temps,
- $V(X_t) < \infty$, et indépendant du temps,
- $Cov(X_t, X_{t-h}) = E\left[(X_t - m)(X_{t-h} - m)\right] = \gamma_h$, est indépendant du temps.

Remarques :

- γ_h est l'auto-covariance au retard h et $\gamma_0 = V(X_t)$.

Stationnarité-Définitions

Définition (stationnarité faible)

Un processus stochastique X_t est faiblement stationnaire (ou stationnaire de second ordre) si :

- $E(X_t) = m$ indépendant du temps,
- $V(X_t) < \infty$, et indépendant du temps,
- $Cov(X_t, X_{t-h}) = E\left[(X_t - m)(X_{t-h} - m)\right] = \gamma_h$, est indépendant du temps.

Remarques :

- γ_h est l'auto-covariance au retard h et $\gamma_0 = V(X_t)$.
- $\gamma_h = \gamma_{-h}$ pour tout h.

Stationnarité-Définitions

Définition (Stationnarité forte)

Un processus stochastique X_t est dit fortement stationnaire (ou strictement stationnaire) si la distribution de X_t est identique à celle de $Y_t = X_{t+h}$

Stationnarité-Définitions

Définition (Stationnarité forte)

Un processus stochastique X_t est dit fortement stationnaire (ou strictement stationnaire) si la distribution de X_t est identique à celle de $Y_t = X_{t+h}$

Remarques :

Stationnarité-Définitions

Définition (Stationnarité forte)

Un processus stochastique X_t est dit fortement stationnaire (ou strictement stationnaire) si la distribution de X_t est identique à celle de $Y_t = X_{t+h}$

Remarques :

- La stationnarité stricte est équivalente à dire que la distribution de X_t est indépendante du temps.

Stationnarité-Définitions

Définition (Stationnarité forte)

Un processus stochastique X_t est dit fortement stationnaire (ou strictement stationnaire) si la distribution de X_t est identique à celle de $Y_t = X_{t+h}$

Remarques :

- La stationnarité stricte est équivalente à dire que la distribution de X_t est indépendante du temps.
- La stationnarité stricte est souvent très restrictive, puisqu'elle exige que la série temporelle est totalement invariante dans le temps, i.e tous les moments sont indépendants du temps.

Exemples des processus stationnaires

Exemples des processus stationnaires

- Bruit blanc faible (Weak White Noise) : Un processus ϵ_t est dit bruit blanc faible si :

Exemples des processus stationnaires

- Bruit blanc faible (Weak White Noise) : Un processus ϵ_t est dit bruit blanc faible si :
  - $E(\epsilon_t) = 0$ et $V(\epsilon_t) = \sigma^2 < \infty$ pour tout t,

Exemples des processus stationnaires

- Bruit blanc faible (Weak White Noise) : Un processus ϵ_t est dit bruit blanc faible si :
  - $E(\epsilon_t) = 0$ et $V(\epsilon_t) = \sigma^2 < \infty$ pour tout t,
  - $E(\epsilon_t \epsilon_{t-h}) = 0$ pour tout t et $h \neq 0$.

Exemples des processus stationnaires

- Bruit blanc faible (Weak White Noise) : Un processus ϵ_t est dit bruit blanc faible si :
  - $E(\epsilon_t) = 0$ et $V(\epsilon_t) = \sigma^2 < \infty$ pour tout t,
  - $E(\epsilon_t \epsilon_{t-h}) = 0$ pour tout t et $h \neq 0$.
- Bruit blanc fort (Strong White Noise) : Un processus ϵ_t est dit bruit blanc fort (ou BB indépendant) si :

Exemples des processus stationnaires

- Bruit blanc faible (Weak White Noise) : Un processus ϵ_t est dit bruit blanc faible si :
  - $E(\epsilon_t) = 0$ et $V(\epsilon_t) = \sigma^2 < \infty$ pour tout t,
  - $E(\epsilon_t \epsilon_{t-h}) = 0$ pour tout t et $h \neq 0$.
- Bruit blanc fort (Strong White Noise) : Un processus ϵ_t est dit bruit blanc fort (ou BB indépendant) si :
  - $E(\epsilon_t) = 0$ et $V(\epsilon_t) = \sigma^2 < \infty$ pour tout t,

Exemples des processus stationnaires

- Bruit blanc faible (Weak White Noise) : Un processus ϵ_t est dit bruit blanc faible si :
  - $E(\epsilon_t) = 0$ et $V(\epsilon_t) = \sigma^2 < \infty$ pour tout t,
  - $E(\epsilon_t \epsilon_{t-h}) = 0$ pour tout t et $h \neq 0$.
- Bruit blanc fort (Strong White Noise) : Un processus ϵ_t est dit bruit blanc fort (ou BB indépendant) si :
  - $E(\epsilon_t) = 0$ et $V(\epsilon_t) = \sigma^2 < \infty$ pour tout t,
  - La $v.a$ ϵ_t est identiquement distribuée.

Exemples des processus stationnaires

- Bruit blanc faible (Weak White Noise) : Un processus ϵ_t est dit bruit blanc faible si :
  - $E(\epsilon_t) = 0$ et $V(\epsilon_t) = \sigma^2 < \infty$ pour tout t,
  - $E(\epsilon_t \epsilon_{t-h}) = 0$ pour tout t et $h \neq 0$.
- Bruit blanc fort (Strong White Noise) : Un processus ϵ_t est dit bruit blanc fort (ou BB indépendant) si :
  - $E(\epsilon_t) = 0$ et $V(\epsilon_t) = \sigma^2 < \infty$ pour tout t,
  - La $v.a$ ϵ_t est identiquement distribuée.
  - ϵ_t et ϵ_{t-h} sont indépendants pour tout t et $h \neq 0$.

Exemples des processus stationnaires

- Bruit blanc faible (Weak White Noise) : Un processus ϵ_t est dit bruit blanc faible si :
  - $E(\epsilon_t) = 0$ et $V(\epsilon_t) = \sigma^2 < \infty$ pour tout t,
  - $E(\epsilon_t \epsilon_{t-h}) = 0$ pour tout t et $h \neq 0$.
- Bruit blanc fort (Strong White Noise) : Un processus ϵ_t est dit bruit blanc fort (ou BB indépendant) si :
  - $E(\epsilon_t) = 0$ et $V(\epsilon_t) = \sigma^2 < \infty$ pour tout t,
  - La $v.a$ ϵ_t est identiquement distribuée.
  - ϵ_t et ϵ_{t-h} sont indépendants pour tout t et $h \neq 0$.
- Bruit blanc gaussien (Gaussian White Noise) : Un processus ϵ_t est dit bruit blanc gaussien si : $\epsilon_t \overset{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$.

Exemple d'un processus stationnaire

Exemple d'un processus stationnaire

```r
set.seed(123)
bb <- rnorm(500, 0, 1)
plot.ts(bb, xlab = "", ylab = "", panel.first = grid(col = "blue"), col = "red")
```

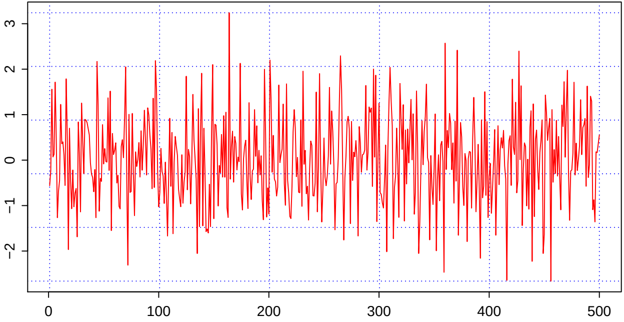


Figure: Simulation d'un BB(0,1)

Types de non stationnarité

Types de non stationnarité

Définition

Un processus X_t est dit non stationnaire si une ou plus des conditions de stationnarité n'est pas remplie.

Types de non stationnarité

Définition

Un processus X_t est dit non stationnaire si une ou plus des conditions de stationnarité n'est pas remplie.

Ce terme recouvre nombreux types de non-stationnarité, dont deux sont ici exposés.

- **Stationnarité en tendance :** Une série est stationnaire en tendance si la série obtenue en « enlevant » la tendance temporelle de la série originale est stationnaire.

Types de non stationnarité

Définition

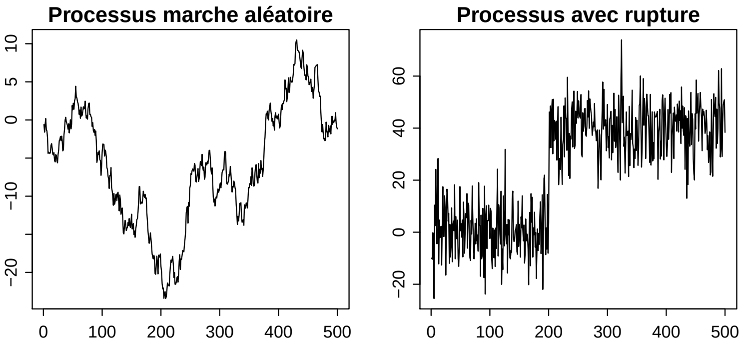
Un processus X_t est dit non stationnaire si une ou plus des conditions de stationnarité n'est pas remplie.

Ce terme recouvre nombreux types de non-stationnarité, dont deux sont ici exposés.

- **Stationnarité en tendance :** Une série est stationnaire en tendance si la série obtenue en « enlevant » la tendance temporelle de la série originale est stationnaire.
- **Stationnarité en différence :** Une série est stationnaire en différence si la série obtenue en différenciant les valeurs de la série originale est stationnaire.

Exemples des processus non stationnaires

```
X1 <- cumsum(rnorm(500))  ## marche aléatoire.
X2 <- c(rnorm(200, 0, 10), 40 + rnorm(300, 0, 10))  ## processus avec rupture.
plot.ts(X1, xlab = "", ylab = "", main = "Processus marche aléatoire")
plot.ts(X2, xlab = "", ylab = "", main = "Processus avec rupture")
```



Définition

On appelle **opérateur retard** l'opérateur L (Lag) ou B (Backward) qui a tout processus X_t, on associe le processus Y_t défini par :

$$\forall\ t \in \mathbb{Z}\ Y_t = LX_t = X_{t-1}$$

Définition

On appelle **opérateur retard** l'opérateur L (Lag) ou B (Backward) qui a tout processus X_t, on associe le processus Y_t défini par :

$$\forall\, t \in \mathbb{Z}\ Y_t = LX_t = X_{t-1}$$

Définition

De la même façon, on appelle l'opérateur F (forward) qui a tout processus X_t, on associe le processus Y_t défini par :

$$\forall\, t \in \mathbb{Z}\ Y_t = FX_t = X_{t+1}$$

Définition

On appelle **opérateur retard** l'opérateur L (Lag) ou B (Backward) qui a tout processus X_t, on associe le processus Y_t défini par :

$$\forall\, t \in \mathbb{Z}\ Y_t = LX_t = X_{t-1}$$

Définition

De la même façon, on appelle l'opérateur F (forward) qui a tout processus X_t, on associe le processus Y_t défini par :

$$\forall\, t \in \mathbb{Z}\ Y_t = FX_t = X_{t+1}$$

Définition

On appelle **opérateur différence** l'opérateur ∇ qui a tout processus X_t, on associe le processus Y_t défini par :

$$\nabla X_t = Y_t = (1 - L)X_t = X_t - X_{t-1}.$$

Propriétés

- $L^0 X_t = X_t$.

Propriétés

- $L^0 X_t = X_t$.
- Si on compose n fois l'opérateur L dans lui même, on obtient : $\underbrace{L \circ L \circ L \circ \ldots \circ L}_{n \text{ fois}} = L^n$ et $L^n X_t = X_{t-n}$.

Propriétés

- $L^0 X_t = X_t$.
- Si on compose n fois l'opérateur L dans lui même, on obtient : $\underbrace{L \circ L \circ L \circ \ldots \circ L}_{n \text{ fois}} = L^n$ et $L^n X_t = X_{t-n}$.
- $L(X_t + Y_t) = LX_t + LY_t$ (opérateur retard est distributif).

Propriétés

- $L^0 X_t = X_t$.
- Si on compose n fois l'opérateur L dans lui même, on obtient : $\underbrace{L \circ L \circ L \circ \ldots \circ L}_{n \text{ fois}} = L^n$ et $L^n X_t = X_{t-n}$.
- $L(X_t + Y_t) = LX_t + LY_t$ (opérateur retard est distributif).
- $L(\alpha X_t) = \alpha L X_t$. ($\alpha$ est un réel).

Propriétés

- $L^0 X_t = X_t$.
- Si on compose n fois l'opérateur L dans lui même, on obtient : $\underbrace{L \circ L \circ L \circ \ldots \circ L}_{n \text{ fois}} = L^n$ et $L^n X_t = X_{t-n}$.
- $L(X_t + Y_t) = LX_t + LY_t$ (opérateur retard est distributif).
- $L(\alpha X_t) = \alpha L X_t$. ($\alpha$ est un réel).
- $\nabla^k X_t = (1 - L)^k X_t$.

Propriétés

- $L^0 X_t = X_t$.
- Si on compose n fois l'opérateur L dans lui même, on obtient : $\underbrace{L \circ L \circ L \circ \ldots \circ L}_{n \text{ fois}} = L^n$ et $L^n X_t = X_{t-n}$.
- $L(X_t + Y_t) = LX_t + LY_t$ (opérateur retard est distributif).
- $L(\alpha X_t) = \alpha L X_t$. ($\alpha$ est un réel).
- $\nabla^k X_t = (1 - L)^k X_t$.

Propriétés

- $L^0 X_t = X_t$.
- Si on compose n fois l'opérateur L dans lui même, on obtient : $\underbrace{L \circ L \circ L \circ \ldots \circ L}_{n \text{ fois}} = L^n$ et $L^n X_t = X_{t-n}$.
- $L(X_t + Y_t) = LX_t + LY_t$ (opérateur retard est distributif).
- $L(\alpha X_t) = \alpha L X_t$. ($\alpha$ est un réel).
- $\nabla^k X_t = (1 - L)^k X_t$.

Remarque : Les mêmes propriétés de l'opérateur L s'applique aussi à l'opérateur F.

Avec R, on fabrique des séries retardées à l'aide de la fonction `lag` (si la série est de classe `ts`) ou la fonction `Lag` de la librairie (package) `Hmisc`.

```
set.seed(123)
x <- as.ts(rnorm(6))  ## génération de 6 valeurs aléatoires normales de classe ts.
lag1.x <- lag(x, -1)  ## série retardée d'une seule observation.
lag2.x <- lag(x, -2)  ## série retardée de deux observations.
(result <- t(cbind(x, lag1.x, lag2.x)))

##             [,1]    [,2]    [,3]     [,4]    [,5]    [,6]   [,7]  [,8]
## x        -0.5605 -0.2302  1.5587  0.07051 0.12929 1.71506     NA    NA
## lag1.x        NA -0.5605 -0.2302  1.55871 0.07051 0.12929 1.7151    NA
## lag2.x        NA      NA -0.5605 -0.23018 1.55871 0.07051 0.1293 1.715


res2 <- ts.intersect(x, lag1.x, lag2.x)
t(res2)

##             [,1]     [,2]    [,3]    [,4]
## x         1.5587  0.07051 0.12929 1.71506
## lag1.x  -0.2302  1.55871 0.07051 0.12929
## lag2.x  -0.5605 -0.23018 1.55871 0.07051
```

Et, on applique l'opérateur différence à l'aide de la fonction `diff`.

Et, on applique l'opérateur différence à l'aide de la fonction `diff`.

```
set.seed(123)
xt <- as.ts(rnorm(5))
xt1 <- lag(xt, -1)  ## série retardée d'une observation
xt2 <- lag(xt, -2)  ## série retardée de 2 observations
xt - xt1  ## première différence

## Time Series:
## Start = 2
## End = 5
## Frequency = 1
## [1]  0.33030  1.78889 -1.48820  0.05878

(deltaX <- diff(xt))  ## première différence

## Time Series:
## Start = 2
## End = 5
## Frequency = 1
## [1]  0.33030  1.78889 -1.48820  0.05878
```

```
xt2 - 2 * xt1 + xt  ## différence d'ordre 2: (1-L)^2=L^2-2*L+1

## Time Series:
## Start = 3
## End = 5
## Frequency = 1
## [1]  1.459 -3.277  1.547

(delta2X <- diff(xt, differences = 2))  ## différence d'ordre 2

## Time Series:
## Start = 3
## End = 5
## Frequency = 1
## [1]  1.459 -3.277  1.547
```

Application

On peut définir un polynôme retard tout polynôme qui s'écrit en fonction de l'opérateur retard. On donne un exemple :

Application

On peut définir un polynôme retard tout polynôme qui s'écrit en fonction de l'opérateur retard. On donne un exemple :
Soit le processus X_t définit par : $X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \epsilon_t$.
Ce processus peut s'écrire comme suit :

$$X_t = \phi_1 L X_t + \phi_2 L^2 X_t + \epsilon_t = (\phi_1 L + \phi_2 L^2) X_t + \epsilon_t$$

D'où $(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2) X_t = \epsilon_t \Longrightarrow \Phi(L) X_t = \epsilon_t$.
$\Phi(L) = (1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2)$ est le polynôme retard associé au processus X_t.

Exercices

Exercice 1 :

Exercices

Exercice 1 :

Soient ϵ_t un $BB(0,1)$ et c une constante réelle. Étudier la stationnarité des processus suivants :

$$(a)\ \ X_t = (-1)^t \epsilon_t \qquad\qquad (b)\ \ Y_t = x_t + \epsilon_t$$

$$(c)\ \ Z_t = \epsilon_1 \cos(ct) + \epsilon_2 \sin(ct) \qquad (d)\ \ W_t = \epsilon_t \cos(ct) + \epsilon_{t-1} \sin(ct)$$

Exercices

Exercice 1 :

Soient ϵ_t un $BB(0,1)$ et c une constante réelle. Étudier la stationnarité des processus suivants :

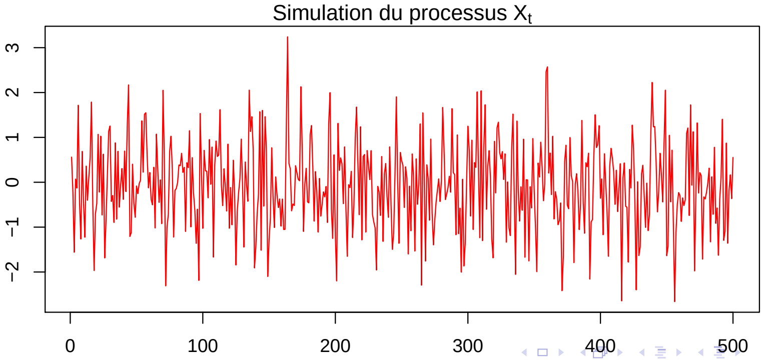
$$(a)\ \ X_t = (-1)^t \epsilon_t \qquad\qquad (b)\ \ Y_t = x_t + \epsilon_t$$

$$(c)\ \ Z_t = \epsilon_1 \cos(ct) + \epsilon_2 \sin(ct) \qquad (d)\ \ W_t = \epsilon_t \cos(ct) + \epsilon_{t-1} \sin(ct)$$

Avec R, simuler 500 observations de chacun des deux processus et les représenter graphiquement.

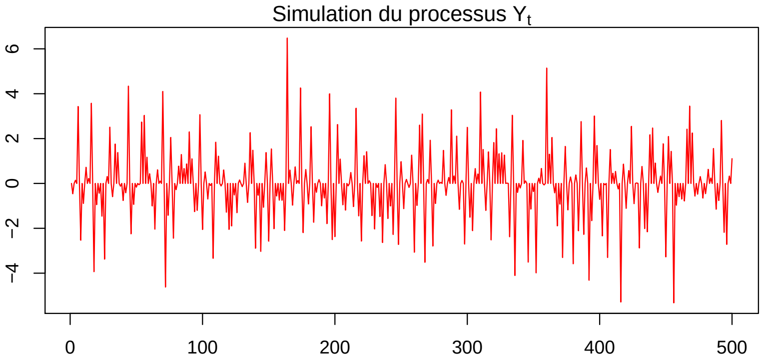
Solution 1

```
## Processus Xt
set.seed(123)
et <- rnorm(500)
xt <- (-1)^(1:500) * et
plot.ts(xt, xlab = "", ylab = "", col = "red", main = expression(paste("Simulation du proce
    X[t])))
```



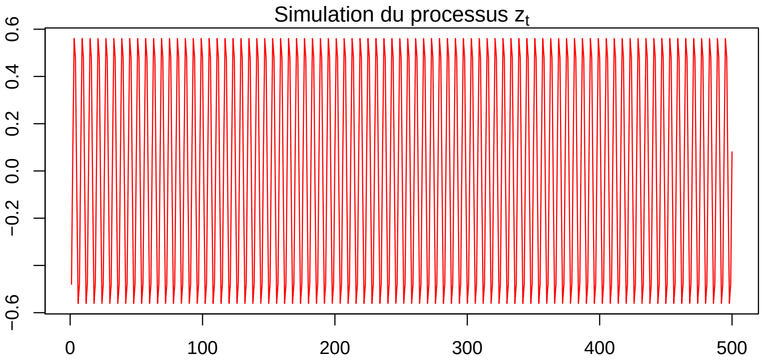
Solution 1

```
## Processus Yt
yt <- xt + et
plot.ts(yt, xlab = "", ylab = "", col = "red", main = expression(paste("Simulation du proce
    Y[t]))
```



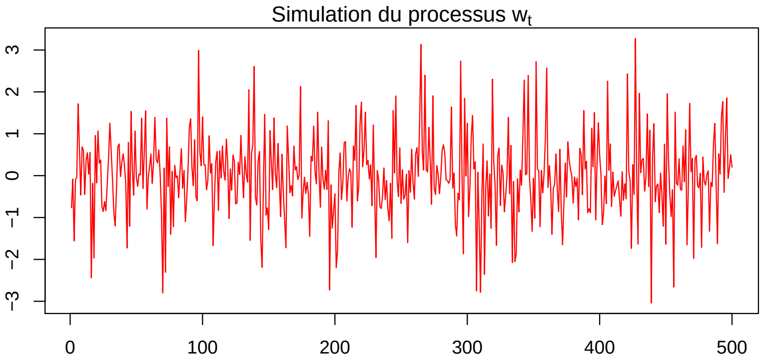
Solution 1

```
## Processus Zt avec c=pi/3
zt<-et[1]*cos(pi/3*(1:500))+et[2]*sin(pi/3*(1:500))
plot.ts(zt,xlab="",ylab="",col="red",

        main=expression(paste("Simulation du processus ",z[t])))
```



Solution 1

```
## Processus wt avec c=pi/3
wt<-et*cos(pi/3*(1:500))+et*sin(pi/3*(1:500))
plot.ts(wt,xlab="",ylab="",col="red",

        main=expression(paste("Simulation du processus ",w[t])))
```



Exercices

Exercice 2 :

Exercices

Exercice 2 :

ϵ_t est un bruit blanc de moyenne nulle et de variance égale à 1. Exprimer les processus suivants en fonction de l'opérateur retard, L, et donner leurs polynômes caractéristiques associés.

Exercices

Exercice 2 :

ϵ_t est un bruit blanc de moyenne nulle et de variance égale à 1. Exprimer les processus suivants en fonction de l'opérateur retard, L, et donner leurs polynômes caractéristiques associés.

a) $X_t = 0.3X_{t-1} + \epsilon_t$.

Exercices

Exercice 2 :

ϵ_t est un bruit blanc de moyenne nulle et de variance égale à 1. Exprimer les processus suivants en fonction de l'opérateur retard, L, et donner leurs polynômes caractéristiques associés.

a) $X_t = 0.3X_{t-1} + \epsilon_t$.

b) $X_t = \epsilon_t - 1.3\epsilon_{t-1} + 0.4\epsilon_{t-2}$.

Exercices

Exercice 2 :

ϵ_t est un bruit blanc de moyenne nulle et de variance égale à 1. Exprimer les processus suivants en fonction de l'opérateur retard, L, et donner leurs polynômes caractéristiques associés.

a) $X_t = 0.3X_{t-1} + \epsilon_t$.

b) $X_t = \epsilon_t - 1.3\epsilon_{t-1} + 0.4\epsilon_{t-2}$.

c) $X_t = 0.5X_{t-1} + \epsilon_t - 1.3\epsilon_{t-1} + 0.4\epsilon_{t-2}$.

Exercices

Exercice 3 :

Exercices

Exercice 3 :

On considère un processus comme la somme d'un signal et un bruit de la forme générale $s_t + w_t$ où $w_t \overset{iid}{\sim} N(0,1)$.

Simuler et représenter graphiquement 300 réalisations pour chacun des deux processus suivants :

Exercices

Exercice 3 :
On considère un processus comme la somme d'un signal et un bruit de la forme générale $s_t + w_t$ où $w_t \overset{iid}{\sim} N(0,1)$.
Simuler et représenter graphiquement 300 réalisations pour chacun des deux processus suivants :
a) $X_t = s_t + w_t$ où

$$s_t = \begin{cases} 0, & \text{pour } t = 1, 2, \ldots 120 \\ 10 \exp\left(-\frac{t-120}{20}\right) \cos\left(\frac{2\pi t}{4}\right), & \text{pour } t = 121, 122, \ldots, 300. \end{cases}$$

Exercices

Exercice 3 :

On considère un processus comme la somme d'un signal et un bruit de la forme générale $s_t + w_t$ où $w_t \overset{iid}{\sim} N(0,1)$.

Simuler et représenter graphiquement 300 réalisations pour chacun des deux processus suivants :

a) $X_t = s_t + w_t$ où

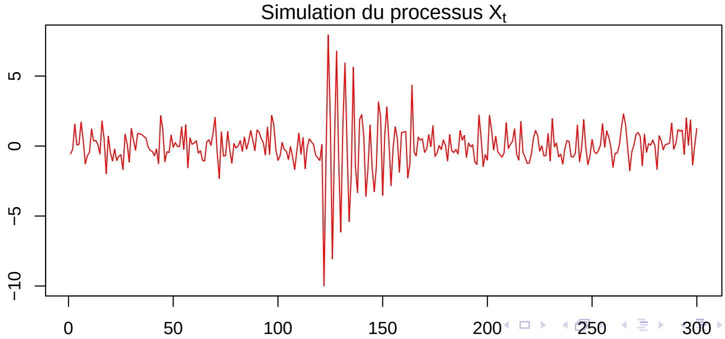
$$s_t = \begin{cases} 0, & \text{pour } t = 1, 2, \ldots 120 \\ 10 \exp\left(-\frac{t-120}{20}\right) \cos\left(\frac{2\pi t}{4}\right), & \text{pour } t = 121, 122, \ldots, 300. \end{cases}$$

b) $Y_t = s_t + w_t$ où

$$s_t = \begin{cases} 0, & \text{pour } t = 1, 2, \ldots 120 \\ 10 \exp\left(-\frac{t-120}{200}\right) \cos\left(\frac{2\pi t}{4}\right), & \text{pour } t = 121, 122, \ldots, 300. \end{cases}$$

Solution 3

```
## Premier cas
set.seed(123)
wt<-rnorm(300); st1<-rep(0,120)
st2<-10*exp(-((121:300)-120)/20)*cos(2*pi*(121:300)/4)
st<-c(st1,st2); Xt<-st+wt
plot.ts(Xt,xlab="",ylab="",col="red",

      main=expression(paste("Simulation du processus ",X[t])))
```



Solution 3

```
## Deuxième cas
st3<-10*exp(-((121:300)-120)/200)*cos(2*pi*(121:300)/4)
St<-c(st1,st3); Yt<-St+wt
plot.ts(Yt,xlab="",ylab="",col="red",

        main=expression(paste("Simulation du processus ",Y[t])))
```